Limiti delle forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞, 0/0

Studiati con i limiti notevoli

1) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{15}{\ln x}} = 0^0$

Il limite si affronta **passando alla forma esponenziale** dell'espressione della funzione.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{15}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x^{\frac{15}{\ln x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{15}{\ln x}\cdot\ln(x)} = e^{15}$$

2) $\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}\right)^{x^2-\pi x} = (+\infty)^0$

Osserviamo che il punto x=π per il dominio della funzione è di accumulazione solo a destra.
Elaboriamo il limite passando alla forma esponenziale per la funzione.

$$\lim_{x\to\pi^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}\right)^{x^2-\pi x} = \lim_{x\to\pi^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}\right)^{x^2-\pi x} = \lim_{x\to\pi^+} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}\right)^{x^2-\pi x}\right)}$$

Occupiamoci dello studio del **limite dell'esponente**.

$$\lim_{x\to\pi^+}(x^2-\pi x)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}\right) = \lim_{x\to\pi^+} x(x-\pi)\left(\ln(1)-l\,n\left(\sqrt{x-\pi}\right)\right) = \lim_{x\to\pi^+} x(x-\pi)\left(-\frac{1}{2}l\,n(x-\pi)\right) = \lim_{x\to\pi^+} -\frac{1}{2}x\cdot \lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)\cdot l\,n(x-\pi)$$

Osserviamo che il limite del primo fattore vale -π/2 e quello del secondo fattore vale zero in virtù del limite notevole

$\lim_{t\to 0^+} t^r\cdot\log_a t = 0$, per ogni r>0 e per ogni a>0 e $a\neq 1$. Dunque si ha

$$\lim_{x\to\pi^+} -\frac{1}{2}x\cdot\lim_{x\to\pi^+}(x-\pi)\cdot l\,n(x-\pi) = -\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$$

Ritornando al limite in esame si ha

$$\lim_{x\to\pi^+} e^{(x^2-\pi x)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x-\pi}}\right)} = e^0 = 1$$

3) $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\left(\frac{1}{\cos(\pi x)}\right)^{2x-1} = (+\infty)^0$

Passando alla forma esponenziale si ha

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{\cos(\pi x)}\right)^{2x-1}\right)} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} e^{(2x-1)\ln\left(\frac{1}{\cos(\pi x)}\right)} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} e^{(2x-1)(\ln(1)-\ln\cos(\pi x))} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} e^{(2x-1)(-\ln\cos(\pi x))}$$

Occupiamoci ora del **limite della funzione presente all'esponente**.

$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} (2x-1)(-\ln\cos(\pi x))$ Ponendo $2x-1=t$, per $x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-$ si ha $t\to 0^-$, dunque

$$\lim_{t\to 0^-} t\left(-\ln\cos\left(\pi\frac{t+1}{2}\right)\right) = \lim_{t\to 0^-} t\left(-\ln\cos\left(\pi\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim_{t\to 0^-} -t\cdot\ln\left(-sen\left(\pi\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{-t}{-sen\left(\pi\frac{t}{2}\right)}\cdot\lim_{t\to 0^-}\left(-sen\left(\pi\frac{t}{2}\right)\right)\cdot\ln\left(-sen\left(\pi\frac{t}{2}\right)\right) = \lim_{t\to 0^-}\frac{\pi\frac{t}{2}}{sen\left(\pi\frac{t}{2}\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\lim_{y\to 0^+}(y\cdot\ln y) = 1\cdot\frac{2}{\pi}\cdot 0 = 0$$

A questo punto possiamo concludere che il limite della funzione in esame vale

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} e^{(2x-1)(-\ln\cos(\pi x))} = e^0 = 1$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x = 1^{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1+1}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(e^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 1^{\frac{1}{2}} = e$$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{x-1} = 1^{-\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^{x-3+2} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^{x-3}\left(1+\frac{-8}{x+3}\right)^2 = e^{-8}\cdot 1 = e^{-8}$$

6) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{9x} = 1^{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+5}\right)^{9x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{4x+5-5}\right)^{\frac{9}{4}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{4x+5}\left(1+\frac{-8}{4x+5}\right)^{-5}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(e^{-8}\cdot 1^{-5}\right)^{\frac{9}{4}} = e^{-18}$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_4(1+7x)}{11x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_4(1+7x)}{11x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_4(1+7x)}{7x}\cdot\frac{7}{11} = \frac{7}{11\cdot\ln(4)}$$

8) $\lim_{x\to\pi}\frac{e^{senx}-1}{x-\pi}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{senx}-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{e^{senx}-1}{senx}\cdot\frac{senx}{x-\pi}=1\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{senx}{x-\pi}$$

Ponendo $x-\pi=t$ si ha

$$\lim_{t\to0}\frac{sen(\pi+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-sen(t)}{t}=-1$$

9) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{\cos x-senx}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tgx-1}{\cos x-senx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{senx}{\cos x}-1}{\cos x-senx}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x-senx)}{\cos x(\cos x-senx)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=-\sqrt{2}$$

10) $\lim_{x\to0}\frac{x^2sen(3x)-x^3}{tgx(1-\cos x)}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2sen(3x)-x^3}{tgx(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{(1-\cos x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{sen(3x)-x}{tgx}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\left(\frac{sen(3x)}{x}-1\right)}{tgx}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{tgx}\lim_{x\to0}\left(\frac{sen(3x)}{x}-1\right)=$$

$$2\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\left(3\cdot\frac{sen(3x)}{3x}-1\right)=2\cdot(3\cdot1-1)=4$$