Esercitazione su limiti che si presentano in una forma indeterminata

Studiare i seguenti limiti

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\sqrt{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$

3) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+\sqrt{-x}}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x^2+x}}$

5) $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{senx}$

7) $\lim_{x\to\pi^+}\frac{e^{senx}-1}{1+\cos x}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{7^{-x}-1}{x}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{4^x-5^x}$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$

Elaborazioni

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\sqrt{x}\right)=+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x^{\frac{3}{2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x+2}=1$$

3) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-2}{x+\sqrt{-x}}=\frac{0}{0}$

Si procede con la razionalizzazione del numeratore e del denominatore al fine di far comparire in entrambi il fattore infinitesimo (x+1). Si ha:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-2\right)\left(\sqrt{3-x}+2\right)\left(x-\sqrt{-x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}+2\right)\left(x+\sqrt{-x}\right)\left(x-\sqrt{-x}\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(3-x-4)\left(x-\sqrt{-x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}+2\right)\left(x^2+x\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)\left(x-\sqrt{-x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}+2\right)\cdot x(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{-\left(x-\sqrt{-x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}+2\right)\cdot x}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{0}{0}$

Osserviamo che il punto x=0 è di accumulazione solo a destra per il dominio della funzione. Ciò premesso si ha $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}=1\cdot 1=1$

5) $\lim_{x\to -\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\infty\cdot 0$ si ha $\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{senx}=\frac{0}{0}$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\cdot\frac{-x}{senx}=1\cdot(-1)=-1$

7) $\lim_{x\to \pi^+}\frac{e^{senx}-1}{1+\cos x}=\frac{0}{0}$ si ha $\lim_{x\to \pi^+}\frac{e^{senx}-1}{senx}\cdot\frac{senx}{1+\cos x}=1\cdot\lim_{x\to \pi^+}\frac{senx}{1+\cos x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to \pi^+}\frac{\cos x}{-senx}=\frac{-1}{-(0^-)}=-\infty$

Modo diverso per studiare il limite senza l'applicazione della regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{e^{senx}-1}{senx}\cdot\frac{senx}{1+\cos x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{senx}{1+\cos x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{senx(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{senx(1-\cos x)}{\left(1-\cos^2 x\right)}=$$

$$\lim_{x\to \pi^+}\frac{senx(1-\cos x)}{sen^2 x}=\lim_{x\to \pi^+}\frac{1-\cos x}{senx}=\frac{2}{0^-}=2\cdot(-\infty)=-\infty$$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{7^{-x}-1}{x}=\frac{0}{0}$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{7^{-x}-1}{-x}\cdot(-1)=-\ln(7)$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{4^x-5^x}=\frac{0}{0}$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left(\frac{2^x}{3^x}-1\right)}{5^x\left(\frac{4^x}{5^x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{4}{5}\right)^x-1}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\frac{4}{5}\right)^x-1}=$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}=\frac{\ln 2-\ln 3}{\ln 4-\ln 5}$$

10) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x=1^\infty$ si ha $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{2}{2x-1}\right)^x=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^x=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{x-\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=e\cdot 1=e$$