Studio di limiti delle forme indeterminate

$0\cdot\infty$, $0/0$, ∞/∞, 0^0, $\infty-\infty$, ∞^0

utilizzando anche la regola di de l'Hôpital

1) $\lim_{x\to 0^+} x^r \cdot \log_a x$, con $a>0 \wedge a\neq 1$ e $r>0$ — Risposta: 0

2) $\lim_{x\to 0^+} senx \cdot \log(x\cos x)$ — Risposta: 0

3) $\lim_{x\to 0^+} arcsen(2x)\cdot \log^2 x$ — Risposta: 0

4) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos x \cdot \log(2x-\pi)$ — Risposta: 0

5) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \dfrac{\log(1+2x-\pi)}{\cos x}$ — Risposta: -2

6) $\lim_{x\to\pi^-} (senx)^{1+\cos x}$ — Risposta: 1

7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xsenx - tg^2 x}{1-\sqrt{x^4+1}}$ — Risposta: $\dfrac{5}{3}$

8) $\lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{2x}-1\right)-\log x$ — Risposta:$+\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{2x}+1\right)-\log\left(2e^x+x\right)$ — Risposta:$+\infty$

10) $\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{-\frac{1}{x}}$ — Risposta:1

11) $\lim_{x\to 1} \left(1-\sqrt{x}\right)^{sen(\pi x)}$ — Risposta:1

12) $\lim_{x\to 0} (-x\cdot\log x)^x$ — Risposta:1

Soluzione

1) $\lim_{x\to0^+} x^r\cdot\log_a x$, con $a>0 \wedge a\neq1$ e $r>0$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$; lo studiamo riconducendolo alla forma ∞/∞ e applicando successivamente la regola di de l'Hôpital.

$\lim_{x\to0^+} x^r\cdot\log_a x = \lim_{x\to0^+}\frac{\log_a x}{x^{-r}} = \frac{\infty}{+\infty}$, il segno dell'infinito al numeratore dipende dalla base a del logaritmo; con $a>1$ si presenta $-\infty$, con $0<a<1$ si presenta $+\infty$. In ogni caso si può applicare la regola di de l'Hôpital. Si ha.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log_a x}{x^{-r}} \overset{H.}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x\cdot\log a}}{-rx^{-r-1}} = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{r}\right)\frac{x^{r+1}}{x\cdot\log a} = \left(-\frac{1}{r}\right)\lim_{x\to0^+}\frac{x^r}{\log a} = \left(-\frac{1}{r}\right)\cdot0=0$$

2) $\lim_{x\to0^+} senx\cdot\log(x\cos x) = 0\cdot(-\infty)$, forma indeterminata.

Sfruttiamo un limite notevole per cambiare leggermente la funzione.

$\lim_{x\to0^+} senx\cdot\log(x\cos x) = \lim_{x\to0^+}\frac{senx}{x}\cdot x\log(x\cos x) = \lim_{x\to0^+}\frac{senx}{x}\cdot\lim_{x\to0^+} x\log(x\cos x) =$
$1\cdot\lim_{x\to0^+} x\log(x\cos x) = \lim_{x\to0^+} x\log(x\cos x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\log(x\cos x)}{x^{-1}} = \frac{-\infty}{+\infty}$ Possiamo applicare la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(x\cos x)}{x^{-1}} \overset{H.}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x\cos x}\cdot(1\cdot\cos x - xsenx)}{-x^{-2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{-x^2}{x\cos x}(\cos x - xsenx) =$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(-x\left(\frac{\cos x}{\cos x} - x\frac{senx}{\cos x}\right)\right) = 0(1-0)=0$$

3) $\lim_{x\to0^+} arcsen(2x)\cdot\log^2 x = 0\cdot(+\infty)$

Sfruttiamo prima un limite notevole, successivamente trasformeremo la funzione per ricondurre il limite alla forma indeterminata ∞/∞ e poter applicare la regola di de l'Hôpital. Si ha:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{arcsen(2x)}{2x}\cdot2x\log^2 x = \lim_{x\to0^+}\frac{arcsen(2x)}{2x}\cdot\lim_{x\to0^+}2x\log^2 x = 1\cdot\lim_{x\to0^+}2x\log^2 x =$$
$$2\lim_{x\to0^+}\frac{\log^2 x}{x^{-1}} \overset{H.}{=} 2\lim_{x\to0^+}\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -4\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x^{-1}} \overset{H.}{=} -4\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = 4\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x} = 4\lim_{x\to0^+}x=0$$

4) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos x\cdot\log(2x-\pi)=0\cdot(-\infty)$

Cambiamo la variabile ponendo $2x-\pi=t$, quindi $x=\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}$. Dall'essere $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$, segue $t\to 0^+$ ed il limite diventa

$$\lim_{t\to0^+}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\right)\cdot\log t=\lim_{t\to0^+}\left(-sen\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\log t\right)=\lim_{t\to0^+}\left(-\frac{sen\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\cdot\frac{t}{2}\log t\right)=$$

$$\lim_{t\to0^+}\left(-\frac{sen\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\right)\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2}\log t=-1\cdot\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\log t}{t^{-1}}\overset{H.}{=}-\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-t^{-2}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{t^2}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}t=0$$

5) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{\log(1+2x-\pi)}{\cos x}=\frac{0}{0}$

Ricordiamo che se $\varphi(x)$ è infinitesimo per $x\to x_0$ allora sussiste il limite notevole

$\lim_{x\to x_0}\frac{\log(1+\varphi(x))}{\varphi(x)}=1$. Ciò premesso si ha

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{\log(1+2x-\pi)}{\cos x}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{\log(1+2x-\pi)}{2x-\pi}\cdot\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{2x-\pi}{\cos x}=1\cdot\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{2x-\pi}{\cos x}\overset{H.}{=}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{2}{-senx}=-2$$

6) $\lim_{x\to\pi^-}(senx)^{1+\cos x}=0^0$

Studiamo il limite scrivendo la funzione sotto forma esponenziale.

$$\lim_{x\to\pi^-}(senx)^{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}e^{\log(senx)^{1+\cos x}}=\lim_{x\to\pi^-}e^{(1+\cos x)\log(senx)}\qquad(*)$$

Preoccupiamoci di studiare il **limite della funzione all'esponente**; faremo vedere che esiste e successivamente **utilizzeremo il teorema sul limite di una funzione composta per concludere l'esercizio**.

$\lim_{x\to\pi^-}(1+\cos x)\log(senx)=0\cdot(-\infty)$ La forma è indeterminata. Scriviamo in modo diverso la funzione per ricondurre il limite alla forma ∞/∞ e poter applicare la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\log(senx)}{(1+\cos x)^{-1}} \overset{H.}{=} \lim_{x\to\pi^-}\frac{\frac{\cos x}{senx}}{-(1+\cos x)^{-2}(-senx)} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x(1+\cos x)^2}{sen^2x} =$$

$$-1\cdot\lim_{x\to\pi^-}\frac{(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = -\lim_{x\to\pi^-}\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

A questo punto, riprendendo il limite (*), con $y=(1+\cos x)\log(senx)$, per il teorema sul limite di una funzione composta si ha

$$\lim_{x\to\pi^-} e^{(1+\cos x)\log(senx)} = \lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1$$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{xsenx-tg^2x}{1-\sqrt{x^4+1}} = \frac{0}{0}$

Elaboriamo la funzione razionalizzando il denominatore e trasformando il numeratore.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xsenx-tg^2x}{1-\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(xsenx-tg^2x\right)\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x^4+1}\right)\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(xsenx-\frac{sen^2x}{\cos^2 x}\right)}{-x^4} = -2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\cdot\frac{\left(x-\frac{senx}{\cos^2 x}\right)}{x^3} =$$

$$-2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{senx}{\cos^2 x}\right)\cdot\frac{1}{x^3} = -2\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{senx}{\cos^2 x}\right)\cdot\frac{1}{x^3} = -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{x\cos^2 x-senx}{x^3}\right) =$$

$$-2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos^2 x-senx}{x^3}\right) \overset{H.}{=} -2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1\cdot\cos^2 x-2x\cos xsenx-\cos x}{3x^2}\right) =$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\cos x\left(\frac{1-\cos x}{3x^2}+\frac{2xsenx}{3x^2}\right) = 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

8) $\lim_{x\to+\infty}\log\left(e^{2x}-1\right)-\log x = \infty-\infty$

Applicando la proprietà del quoziente della funzione logaritmo il limite diventa

$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)$; l'argomento del logaritmo si presenta della forma $\frac{+\infty}{+\infty}$; studiamo il limite di detto argomento con la regola di de l'Hôpital.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{1} = +\infty$, dunque, per il teorema sul limite della funzione composta, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\log y=+\infty$$

9) $\lim_{x\to+\infty}\log\left(e^{2x}+1\right)-\log\left(2e^{x}+x\right)=\infty-\infty$

Operiamo come nel precedente esercizio.

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(e^{2x}+1\right)-\log\left(2e^{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}+x}\right)$$

Studiamo il limite dell'argomento della funzione logaritmo.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}+x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{2e^{x}+1}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}2e^{x}=+\infty$$

Ritornando al limite in esame si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^{x}+x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\log y=+\infty$$

10) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+x\right)^{-\frac{1}{x}}=\infty^{0}$

Scriviamo la funzione nella forma esponenziale.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+x\right)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\log(1+x)^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{\log(1+x)}{x}}$$

Studiamo il limite dell'esponente che si presenta nella forma ∞/∞ applicando la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{\log\left(1+x\right)}{x}\overset{H.}{=}\lim_{x\to+\infty}-\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=-\frac{0}{1}=0$$

Tornando al limite in esame

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{\log(1+x)}{x}}=\lim_{y\to0}e^{y}=1$$

11) $\lim_{x\to1}\left(1-\sqrt{x}\right)^{sen(\pi x)}=0^{0}$ si noti che deve essere $x\to1^{-}$ per la positività della base

Scriviamo la funzione nella forma esponenziale.

$$\lim_{x\to1^{-}}\left(1-\sqrt{x}\right)^{sen(\pi x)}=\lim_{x\to1^{-}}e^{\log\left(1-\sqrt{x}\right)^{sen(\pi x)}}=\lim_{x\to1^{-}}e^{sen(\pi x)\log\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

Occupiamoci dello studio del limite della funzione all'esponente.

$$\lim_{x\to 1^-} sen(\pi x)\log\left(1-\sqrt{x}\right)=0\cdot(-\infty)$$

Riconduciamo il limite alla forma indeterminata ∞/∞.

$$\lim_{x\to 1^-} sen(\pi x)\log\left(1-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\log\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(sen(\pi x)\right)^{-1}}\overset{H.}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{-\left(sen(\pi x)\right)^{-2}\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\cos(\pi x)}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(sen(\pi x)\right)^2}{\sqrt{x}-x}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(sen(\pi x)\right)^2}{\sqrt{x}-x}\overset{H.}{=}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{2sen(\pi x)\cos(\pi x)\cdot\pi}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{0}{-\frac{1}{2}}\right)=0$$

Ritornando al limite in esame si ha

$$\lim_{x\to 1^-} e^{sen(\pi x)\log\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim_{y\to 0} e^{y}=1$$

12) $\lim_{x\to 0}\left(-x\cdot\log x\right)^{x}$

Il limite ha senso per $x\to 0^+$ e tenendo presente il limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x=0$ riconosciamo che si presenta nella forma indeterminata 0^0. Trasformiamo la funzione scrivendola nella forma esponenziale.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-x\cdot\log x\right)^{x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\log(-x\cdot\log x)^{x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{x\log(-x\cdot\log x)}$$

Occupiamoci del limite dell'esponente che si presenta nella forma indeterminata 0·∞.

$$\lim_{x\to 0^+} x\log(-x\cdot\log x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(-x\cdot\log x)}{x^{-1}}\overset{H.}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(-x\cdot\log x)}\left(-1\cdot\log x-x\cdot\frac{1}{x}\right)}{-x^{-2}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x+1}{(x\cdot\log x)}\left(-x^2\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x(\log x+1)}{\log x}=\lim_{x\to 0^+}-x\left(1+\frac{1}{\log x}\right)=0\left(1+\frac{1}{-\infty}\right)=0\cdot 1=0$$

Ritornando al limite in esame concludiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\log(-x\cdot\log x)}=\lim_{y\to 0} e^{y}=1$$