

Il teorema di Archimede con il calcolo integrale

(Area del segmento parabolico)

Teorema

Considerata una parabola γ e due suoi punti A, B , l'area della regione finita di piano delimitata dalla corda AB e dalla parabola, detta segmento parabolico, è pari ai $2/3$ dell'area del rettangolo i cui lati sono il segmento AB e l'altezza del segmento parabolico, definita come la distanza tra la retta $[A;B]$ e la tangente alla parabola parallela ad $[A;B]$.

Determiniamo l'area del segmento parabolico applicando la teoria degli integrali definiti.

Si deve determinare l'area della regione finita di piano compresa tra la retta $s=[A;B]$ e la parabola $\gamma: y = ax^2$, limitatamente all'intervallo $[x_1; x_2]$.

Ci limitiamo a considerare il caso $a > 0$ e con $x_1 < x_2$, lasciando il caso $a < 0$ come utile esercizio per il lettore.

Poiché nell'intervallo considerato il grafico della retta si trova al di sopra dell'arco della parabola, l'area della regione piana delimitata è il valore del seguente integrale definito

$$\int_{x_1}^{x_2} (a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2 - ax^2) dx = \left[a(x_1 + x_2) \frac{x^2}{2} - ax_1x_2x - a \frac{x^3}{3} \right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$a \left((x_1 + x_2) \frac{x_2^2}{2} - x_1x_2^2 - \frac{x_2^3}{3} \right) - a \left((x_1 + x_2) \frac{x_1^2}{2} - x_1^2x_2 - \frac{x_1^3}{3} \right) = (\text{dopo alcune elaborazioni algebriche}) = \frac{1}{6} a (x_2 - x_1)^3 \quad (1)$$

Occorre a questo punto dimostrare che il valore ottenuto per l'area del segmento parabolico è uguale ai $2/3$ dell'area del rettangolo $ABQP$ riportato in figura.

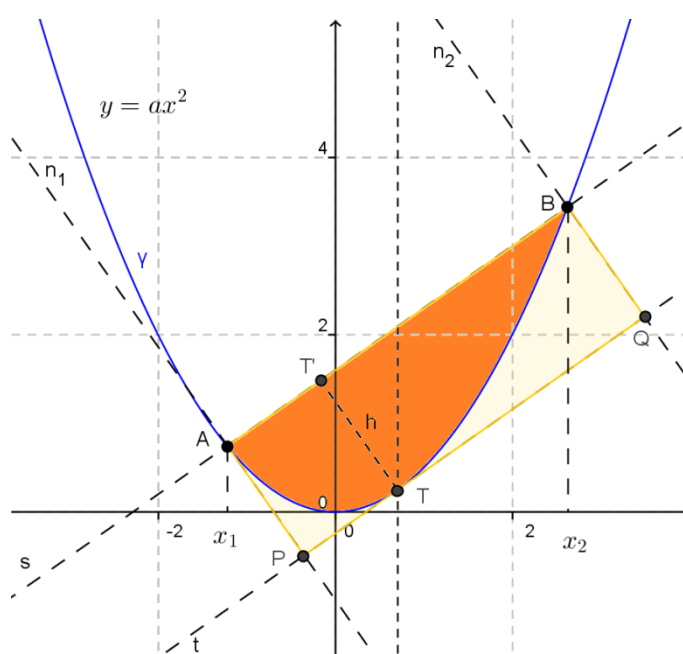


Figura 1- L'area del segmento parabolico è uguale ai $2/3$ dell'area del rettangolo $ABQP$

Riportiamo solo le conclusioni delle elaborazioni necessarie per ottenere gli elementi che permettono di calcolare l'area del rettangolo ABQP⁽¹⁾.

- Equazione della retta [A;B] $s: a(x_1 + x_2)x - y - ax_1x_2 = 0$
- Equazione della retta t tangente alla parabola e parallela alla retta [A;B]
 $t: y = a(x_2 + x_1)x - \frac{1}{4}a(x_2 + x_1)^2$
- Coordinate del punto di contatto T tra la retta t e la parabola: $T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{a(x_1 + x_2)^2}{4}\right)$
- Distanza di T dalla retta [A;B]: $d(T; s) = \frac{|a|(x_2 - x_1)^2}{4\sqrt{a^2(x_1 + x_2)^2 + 1}}$
- Misura della corda AB: $\overline{AB} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2(x_2 + x_1)^2}$

- Area del rettangolo ABQP

$$Area(ABQP) = \overline{AB} \cdot d(T; s) = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2(x_2 + x_1)^2} \cdot$$

$$\frac{|a|(x_2 - x_1)^2}{4\sqrt{a^2(x_1 + x_2)^2 + 1}} = \frac{1}{4}|a||x_2 - x_1|^3 \quad (2)$$

- Confronto tra l'area del segmento parabolico e l'area del rettangolo
 Tenendo delle ipotesi $a > 0$ e $x_1 < x_2$, assunte per il calcolo dell'area del segmento parabolico con l'integrale definito, il rapporto tra l'area del segmento parabolico, espressa dalla (1), e quella del rettangolo ABQ è

$$\frac{Area(Seg - parab)}{Area(ABQP)} = \left(\frac{1}{6}a(x_2 - x_1)^3\right) : \left(\frac{1}{4}a(x_2 - x_1)^3\right) = \frac{2}{3}$$

C.V.D.

⁽¹⁾ Per i dettagli sulle elaborazioni confrontare il documento [Proprietà del segmento parabolico](#)