

Calcolo integrale

Applicazione del teorema della media

⁽¹⁾Quesito

Considerata la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, determinare il suo valore medio relativamente all'intervallo $[0;1]$; successivamente determinare il punto o i punti dell'intervallo in cui la funzione assume il suddetto valore medio.

Soluzione

Com'è noto, per una funzione continua reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a;b]$ $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, si chiama valore medio della funzione il valore numerico dell'espressione

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Il **teorema della media** assicura che per ogni funzione reale continua definita nell'intervallo $[a;b]$ esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo di definizione in cui la funzione assume proprio quel valore. In simboli,

$$\text{Con } f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}, \exists c \in [a;b]: f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Nel caso particolare in esame $a=0$, $b=1$ e dunque

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Concludiamo che il valore medio della funzione relativamente all'intervallo $[0;1]$ è $\frac{1}{3}$.

Ricerca del punto $c \in [0;1]$.

Per determinare il punto c , o i punti dell'intervallo nei quali la funzione assume il valore medio appena trovato, si deve risolvere l'equazione:

$$f(x) = \frac{1}{3}$$

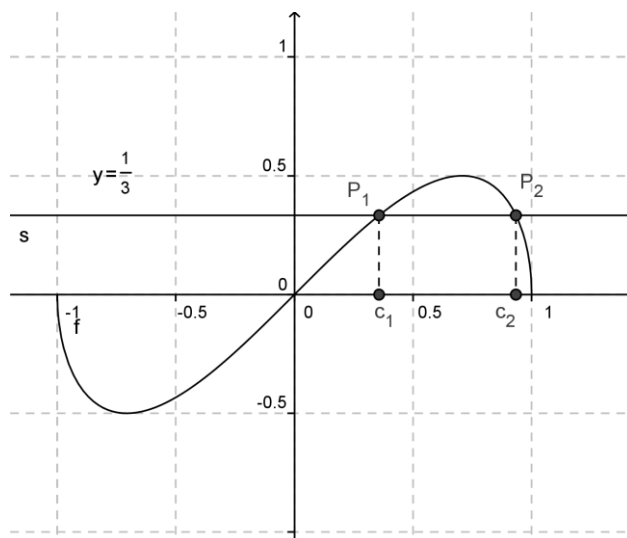
che sviluppata conduce all'equazione biquadratica

$$9x^4 - 9x^2 + 1 = 0$$

Risolvendo quest'ultima equazione si riscontra che esistono due punti dell'intervallo che hanno la proprietà richiesta e sono

$$c_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}.$$

A margine è rappresentata la funzione nel suo dominio di definizione e sono indicati i due punti P_1, P_2 del grafico della stessa le cui ascisse sono rispettivamente i valori c_1, c_2 .



⁽¹⁾ Quesito assegnato in una prova scritta in una quinta classe di Liceo Scientifico M8_5I-30-05-11