

Calcolo di integrali definiti

⁽¹⁾ Calcolare i seguenti integrali definiti

a) $\int_0^1 (e^x - ex) dx$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2}$

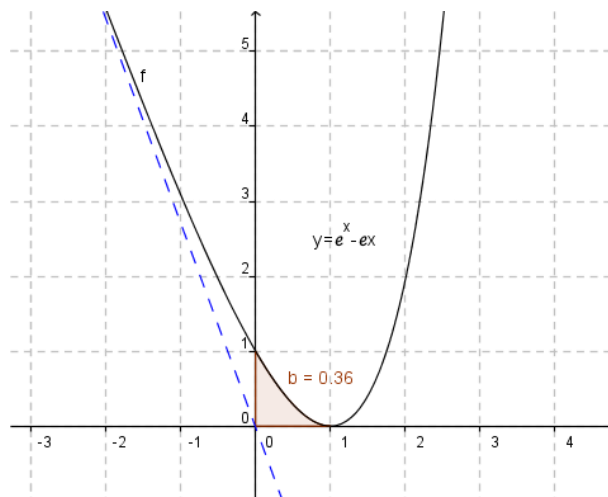
c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+6x+9} dx$

d) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

Soluzione

a) $\int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$
 $\left(e - \frac{e}{2} \right) - (1 - 0) = \frac{e}{2} - 1 \approx 0,3591$

Riportiamo a margine il diagramma della funzione e l'interpretazione geometrica dell'integrale definito calcolato. Il valore dell'integrale definito rappresenta l'area della regione finita di piano delimitata dagli assi cartesiani e dal diagramma della funzione.

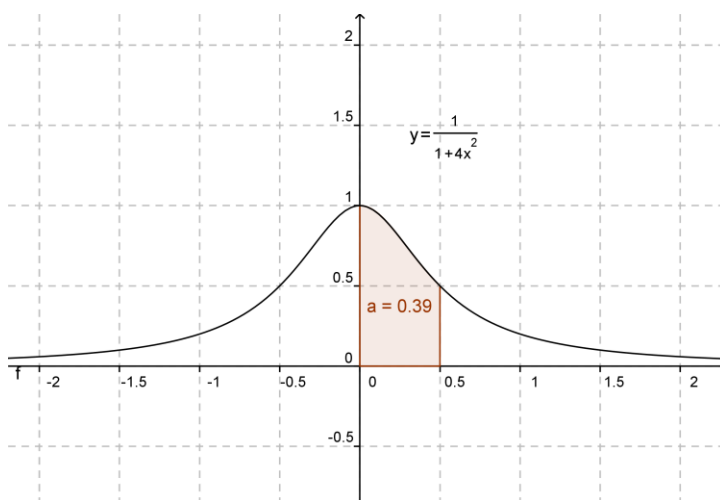


b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{1+(2x)^2} =$
 $\frac{1}{2} [\arctg(2x)]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\arctg 1 - \arctg 0) =$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}$

Riportiamo a margine il diagramma della funzione

$y = \frac{1}{1+4x^2}$ e l'interpretazione geometrica dell'integrale definito calcolato. Il valore dell'integrale rappresenta l'area del sottografico della funzione relativo

all'intervallo $\left[0; \frac{1}{2} \right]$.



c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+6x+9} dx$

Per il calcolo di questo integrale definito occupiamo innanzitutto del corrispondente integrale indefinito.

Trattandosi di una funzione razionale fratta, con al denominatore un trinomio di secondo grado avente discriminante nullo ($\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$), ed avendo il polinomio al numeratore

⁽¹⁾ Esercizi proposti in un compito in classe in una quinta classe del Liceo Scientifico: M7_5I_28-05-2011



grado minore di quello al denominatore, si devono determinare due costanti A, B che verificano la seguente uguaglianza:

$$\frac{x}{x^2+6x+9} = \frac{x}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

Sviluppando i calcoli si perviene all'uguaglianza $x = Ax + 3A + B$, dalla quale si deduce che deve essere $A=1$ e $B=-3$. L'integrale indefinito si calcola come segue:

$$\int \frac{x}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{x}{(x+3)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{3}{(x+3)^2} \right) dx = \log|x+3| + \frac{3}{x+3} + c$$

Calcoliamo ora l'integrale definito.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+6x+9} dx = \left[\log|x+3| + \frac{3}{x+3} \right]_0^1 = \left(\log 4 + \frac{3}{4} \right) - (\log 3 + 1) = \log \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \approx 0,0377$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_0^\pi \cos^2 x dx &= \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi 2\cos(2x) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^\pi = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} (\sin(2\pi) - \sin(0)) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

