

Calcolo di Integrali indefiniti

⁽¹⁾Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int x\sqrt{2x^2-1}dx & \text{b) } \int (x^3+28)^5 x^2 dx & \text{c) } \int \frac{x^3+2x-1}{x^2+1} dx & \text{d) } \int \sqrt{1-9x^2} dx \\ \text{e) } \int \arctg(2x)dx & \text{f) } \int (x+1)\log x dx & \text{g) } \int \frac{x^4-2x+\sqrt{x}}{x^3} dx & \text{h) } \int x\sqrt{3x-5} dx \end{array}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x\sqrt{2x^2-1}dx &= \int x(2x^2-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int 4x(2x^2-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int (2x^2-1)^{\frac{1}{2}} D(2x^2-1) dx = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x^2-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{3}{16} (2x^2-1)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int (x^3+28)^5 x^2 dx &= \frac{1}{3} \int (x^3+28)^5 \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int (x^3+28)^5 \cdot D(x^3+28) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3+28)^{5+1}}{5+1} + c = \\ &= \frac{1}{18} (x^3+28)^6 + c \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \frac{x^3+2x-1}{x^2+1} dx$$

Per il calcolo di questo integrale, poiché il polinomio del numeratore ha grado maggiore di quello del denominatore, si deve eseguire preliminarmente la divisione tra numeratore e denominatore per determinare i polinomi quoziente $Q(x)$ e resto $R(x)$ che permetteranno di scrivere la frazione integranda nella forma seguente:

$$x^3+2x-1 = Q(x) + \frac{R(x)}{x^2+1}$$

Eseguendo la divisione si riscontra che risulta $Q(x) = x$ e $R(x) = x-1$.

Procediamo con il calcolo dell'integrale.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x-1}{x^2+1} dx &= \int \left(x + \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \arctg x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \arctg x + c \end{aligned}$$

d) $\int \sqrt{1-9x^2} dx$ Questo integrale si calcola con il metodo di sostituzione. Ponendo

$$3x = \text{sent} \rightarrow x = \frac{1}{3} \text{sent} \rightarrow dx = \frac{1}{3} \cos t dt.$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-9x^2} dx &= \int \sqrt{1-(3x)^2} dx = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \cdot \frac{1}{3} \cos t dt = \frac{1}{3} \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \frac{1}{3} \int \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \int 2 \cos 2t dt \right) = \frac{1}{6} t + \frac{1}{12} \text{sen} 2t + c \end{aligned}$$

Per ritornare alla variabile x osserviamo che

⁽¹⁾ Esercizi proposti in un compito in classe in una quinta classe del Liceo Scientifico: M7_5I_28-05-2011



- $t = \arcsen(3x)$ e risulta $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = {}^{(2)} 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \sin(\arcsen(3x)) \sqrt{1 - (\sin(\arcsen(3x)))^2} = 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{1 - 9x^2}$

Possiamo scrivere le funzioni primitive utilizzando la variabile x .

$$\frac{1}{6}t + \frac{1}{12} \sin 2t + c = \frac{1}{6} \arcsen(3x) + \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 3x \cdot \sqrt{1 - 9x^2} + c = \frac{1}{6} \arcsen(3x) + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1 - 9x^2} + c$$

e) $\int \arctg(2x) dx$ Questo integrale si calcola con il metodo di integrazione per parti.

$$\begin{aligned} \int \arctg(2x) dx &= \int D(x) \arctg(2x) dx = x \arctg(2x) - \int x \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 dx = \\ x \arctg(2x) - \frac{1}{4} \int \frac{2x \cdot 4}{1+4x^2} dx &= x \arctg(2x) - \frac{1}{4} \log(1+4x^2) + c \end{aligned}$$

f) $\int (x+1) \log x dx$ Questo integrale si calcola con il metodo di integrazione per parti considerando il polinomio $(x+1)$ come fattore differenziale.

$$\begin{aligned} \int (x+1) \log x dx &= \int D\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \log x dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \log x - \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \\ \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \log x - \int \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \log x - \left(\frac{x^2}{4} + x\right) + c \end{aligned}$$

$$g) \int \frac{x^4 - 2x + \sqrt{x}}{x^3} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right) dx = \int \left(x - \frac{2}{x^2} + x^{\frac{1}{2}-3} \right) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

h) $\int x \sqrt{3x-5} dx$ Calcoliamo l'integrale con il metodo di sostituzione ponendo

$$\sqrt{3x-5} = t \rightarrow x = \frac{t+5}{3} \rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$$

$$\int x \sqrt{3x-5} dx = \int \frac{t+5}{3} \cdot t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int (t^2 + 5t) dt = \frac{1}{9} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{5}{2} t^2 \right) + c =$$

$$\frac{1}{27} (\sqrt{3x-5})^3 + \frac{5}{19} (\sqrt{3x-5})^2 + c = \frac{1}{27} (3x-5) \sqrt{3x-5} + \frac{5}{19} (3x-5) + c$$

⁽²⁾ Con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sussiste l'uguaglianza $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$

