

Calcolo integrale

⁽¹⁾(Teorema della media)

Dopo aver enunciato il teorema della media relativamente alla funzione $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, calcolare il valore medio della funzione $f(x) = x \cos x$ relativamente all'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluzione

Enunciato del teorema

Considerata la funzione reale di variabile reale $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $a < b$, continua in tutto l'intervallo $[a;b]$, esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo che verifica l'uguaglianza

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Calcolo del valore medio

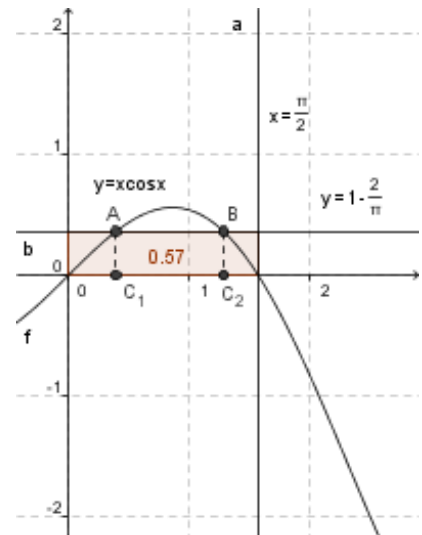
$$f(c) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \frac{2}{\pi} [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 \right) - (0 + 1) \right] = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Nella figura abbiamo rappresentato la funzione $y = x \cos x$, la retta $y = f(c)$ e si nota che essa interseca in due punti distinti il

diagramma della funzione nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; ciò indica che

esistono due punti dell'intervallo in cui la funzione assume il valore numerico uguale al valore medio determinato: $1 - \frac{2}{\pi}$. I due punti sono indicati con C_1, C_2 .



⁽¹⁾ Esercizio assegnato nel compito in classe M7_5I-28-05-11

