

Integrali impropri (generalizzati)

[Int_01](#), [Int_02](#), [Int_03](#), [Int_04](#), [Int_05](#), [Int_06](#), [Int_07](#), [Int_08](#), [Int_09](#), [Int_10](#)

Studiare i seguenti integrali

$$\text{Es}_1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2$$

Conclusione: l'integrale converge

$$\text{Es}_2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k x^{-2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[-x^{-1} \right]_1^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{k} + 1 \right) = 1$$

Conclusione: l'integrale converge

$$\text{Es}_3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} [\arctg x]_0^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\arctg k - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusione: l'integrale converge

$$\text{Es}_4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$$

Osserviamo che la funzione integranda si scompone come segue

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

e quindi si ha

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_2^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\log \left| \frac{x}{x+1} \right| \right]_2^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\log \left| \frac{k}{k+1} \right| - \log \frac{2}{3} \right] =$$

$$\log 1 + \log \frac{3}{2} = \log \frac{3}{2}$$

Conclusione: l'integrale converge

$$\text{Es}_5) \int_0^e (x-1) \log x dx$$

Osserviamo che la funzione integranda non è definita nell'estremo $x=0$ dell'intervallo di integrazione, mentre lo è in ogni altro punto dello stesso. Lo studio dell'integrale si riconduce allo studio del seguente limite

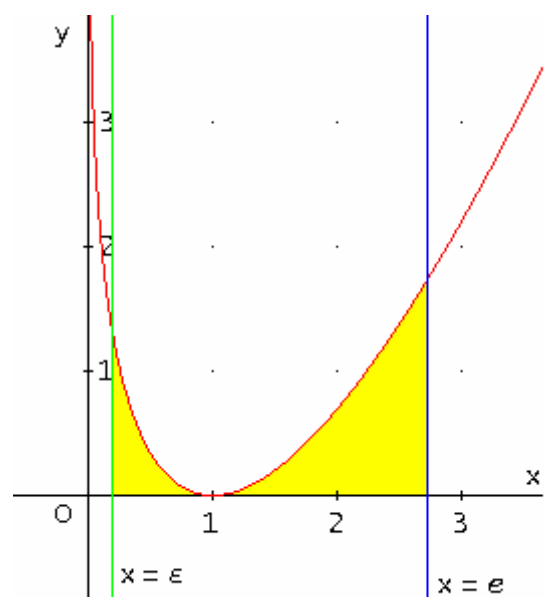
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^e (x-1) \log x dx \quad (1)$$

Occupiamoci del calcolo dell'integrale indefinito connesso. Il calcolo si esegue con il metodo di integrazione per parti assumendo come fattore differenziale il polinomio $(x-1)$. Lo riportiamo di seguito per esteso.

$$\int (x-1) \log x dx = \int D \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \log x dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \log x - \int \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \log x - \int \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx =$$



$$\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \log x - \left(\frac{x^2}{4} - x\right) + c, \text{ essendo } c \text{ una costante additiva.}$$

Impostazione e calcolo del limite (1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon^+}^e (x-1) \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \log x - \left(\frac{x^2}{4} - x\right) \right]_{\varepsilon}^e = \left[\left(\frac{e^2}{2} - e\right) \log e - \left(\frac{e^2}{4} - e\right) \right] -$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon\right) \log \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \varepsilon\right) \right] = \frac{e^2}{4} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon\right) \log \varepsilon + 0$$

Il limite residuo si presenta della forma indeterminata $0 \cdot \infty$, ma esiste ed il suo valore è zero. Infatti possiamo scriverlo in modo diverso

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) \varepsilon \log \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \log \varepsilon = -1 \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \log \varepsilon$$

ed osservare che il limite residuo è notevole⁽¹⁾ ed il suo valore è zero.

Osservazione

Chi volesse calcolare il limite ricorrendo alla regola di de l'Hôpital può ricondurlo alla forma ∞/∞ scrivendo

$$= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log \varepsilon}{\varepsilon^{-1}} \xrightarrow{H.} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{-\varepsilon^{-2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon = 0$$

Conclusione

Il limite (1) esiste e vale $e^2/4$ e questo valore è dunque quello dell'integrale proposto. Pertanto l'integrale converge e la funzione è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $]0;e]$.

Es_6) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

La funzione integranda è definita nell'intervallo aperto $]1;+\infty[$ e per lo studio dell'integrale in esame si deve procedere allo studio del seguente limite

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ k \rightarrow +\infty}} \int_{1+\varepsilon}^k \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

La funzione sarà integrabile in senso generalizzato nell'intervallo assegnato (che coincide con il suo dominio) se e solo se il limite indicato esiste ed è finito.

Per lo studio del limite è necessario procedere preliminarmente al calcolo dell'integrale indefinito, che va eseguito con il metodo di sostituzione.

Calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \quad \text{Effettuando la sostituzione } \sqrt{x-1} = t \rightarrow x = 1+t^2, \text{ quindi } dx = 2t dt.$$

L'integrale nella variabile t diventa

$$\int \frac{2\cancel{t} dt}{(1+t^2)\cancel{t}} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t + C$$

e tornando alla variabile x possiamo scrivere

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C, \quad \text{essendo } C \text{ una costante additiva.}$$

Studio dell'integrale definito

Occorre procedere allo studio del limite

⁽¹⁾ Il limite notevole cui ci si riferisce è $\lim_{r \rightarrow 0^+} x^r \cdot \log x = 0, \forall r > 0$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ k \rightarrow +\infty}} \int_{1+\varepsilon}^k \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ k \rightarrow +\infty}} \left[2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \right]_{1+\varepsilon}^k = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ k \rightarrow +\infty}} 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{k-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon} \right) =$$

$$2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{k-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon} \right) \right) = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{k-1} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Conclusione

L'integrale generalizzato converge e dunque la funzione è integrabile in senso generalizzato.

Es_7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+1} dx$

Lo studio dell'integrale generalizzato si riduce allo studio del seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{x^2}{x^3+1} dx.$$

Occorre, però procedere prima al calcolo dell'integrale indefinito. Si ha

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \log|x^3+1| + C$$

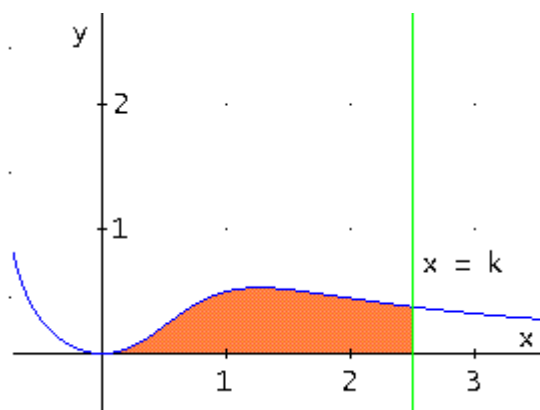
Studio del limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{x^2}{x^3+1} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left[\log|x^3+1| \right]_0^k =$$

$$\frac{1}{3} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\log(k^3+1) - \log 1 \right) = \frac{1}{3} (+\infty - 0) = +\infty$$

Conclusione

Poiché l'integrale diverge positivamente, la funzione assegnata non è integrabile in senso generalizzato.

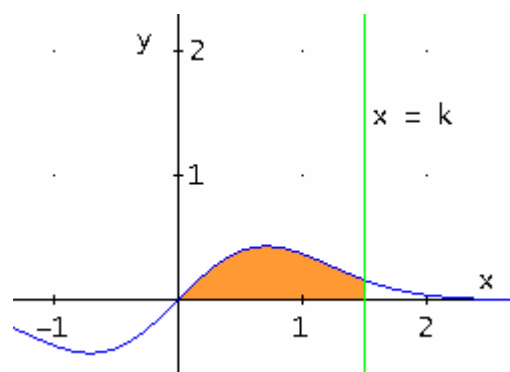


Es_8) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k x e^{-x^2} dx =$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} (e^{-k^2} - 1) = \frac{1}{2}$$

Conclusione

Poiché l'integrale converge, la funzione assegnata è integrabile in senso generalizzato.

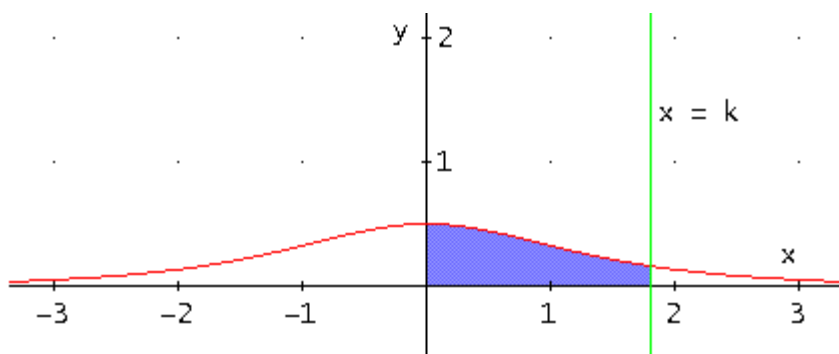


Es_9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

Osserviamo che la funzione integranda è pari perché, come si verifica facilmente, risulta $f(-x)=f(x)$; questa proprietà suggerisce che per lo studio dell'integrale basta studiare il seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \int_0^k \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$$

L'integrale indefinito connesso è immediato. Infatti si ha



$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + C$$

Ciò premesso possiamo scrivere

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \int_0^k \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg}(e^x)]_0^k = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg}(e^k) - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusione

L'integrale è convergente e dunque la funzione è integrabile in senso generalizzato.

Es_10) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x}$

Per lo studio dell'integrale si deve analizzare il seguente limite

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{1+\varepsilon}^k \frac{dx}{x \log^2 x}$$

Occupiamoci dell'integrale indefinito.

Osserviamo che l'integrale è riconducibile ad uno immediato. Infatti, possiamo scrivere

$$\int \frac{dx}{x \log^2 x} = \int (\log x)^{-2} D(\log x) dx = -\frac{1}{\log x} + C$$

Per il limite si ha

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{1+\varepsilon}^k \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{1+\varepsilon}^k =$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \left(-\frac{1}{\log k} + \frac{1}{\log(1+\varepsilon)} \right) = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Conclusione

L'integrale diverge positivamente e quindi la funzione non è integrabile in senso generalizzato.

