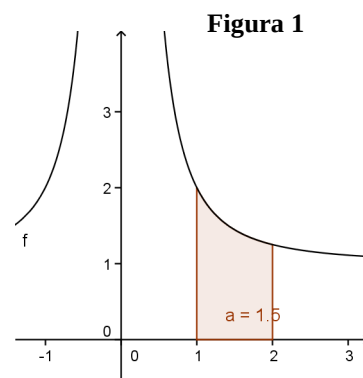


## Integrali definiti

Risolviamo alcuni integrali definiti riportando i passaggi essenziali.

$$1. \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 1) = \frac{3}{2}$$

In **Figura 1** è rappresentata parzialmente la funzione integranda. Il valore dell'integrale definito calcolato rappresenta l'area della regione piana ombreggiata in figura.



$$2. \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = -\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} (-1) dx = -\frac{2}{3} \left[ (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$3. \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \quad \text{L'integrale indefinito associato si calcola per}$$

sostituzione ponendo  $\sqrt{1-x} = t \rightarrow x = 1-t^2 \rightarrow dx = -2t dt$ .

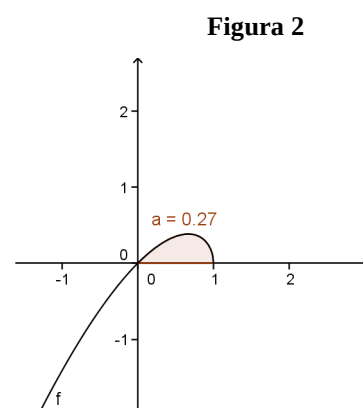
Poiché siano interessati al calcolo dell'integrale definito, determiniamo i valori degli estremi di integrazione della nuova variabile.

$x = 0 \Rightarrow t = 1$ ,  $x = 1 \Rightarrow t = 0$ . Ciò premesso si ha:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \int_1^0 (1-t^2) \cdot t \cdot (-2t) dt = -2 \int_1^0 (t^2 - t^4) dt =$$

$$-2 \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_1^0 = -2 \left[ 0 - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right] = \frac{4}{15}$$

L'illustrazione grafica dell'integrale definito è in **Figura 2**.



4. Procedendo in modo simile a quello riportato nell'integrale n.3 dimostrare che risulta

$$\int_0^2 x\sqrt{2-x} dx = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} [\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{1}{2}$$

$$6. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{Ponendo } x = \sin t \text{ si ha} \quad 1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t \text{ e}$$

$$dx = \cos t \cdot dt.$$

Risolviamo l'integrale indefinito associato.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = 2 \int \cos^2 t \cdot dt = 2 \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt =$$

$$\int dt + \frac{1}{2} \int \cos(2t) \cdot 2 dt = t + \frac{1}{2} \sin(2t) + c$$

A questo, senza ritornare alla variabile  $x$ , si possono determinare gli estremi di integrazione della variabile  $t$ . Risulta:

$$x = 0 \rightarrow t = \arcsin(0) = 0;$$

$$x = 1 \rightarrow t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Per cui si ha

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin(\pi) - (0+0) = \frac{\pi}{2}$$

$$7. \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot (-\sin x) dx =$$

$$[-\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot D(\cos x) dx = (-\cos \pi + \cos 0) + \frac{1}{3} [\cos^3 x]_0^{\pi} = 2 + \frac{1}{3} [(-1)^3 - 1] = \frac{4}{3}$$

$$8. \int_0^1 x \cdot \arctg x \cdot dx$$

L'integrale indefinito si calcola con il metodo di integrazione per parti.

$$\int x \cdot \arctg x \cdot dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \arctg x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + c$$

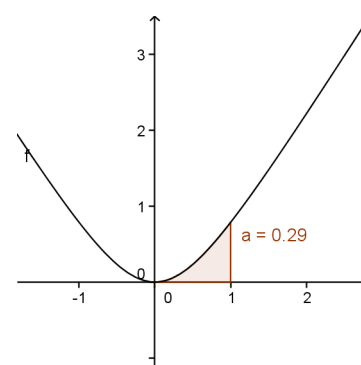
Dunque si ha:

$$\int_0^1 x \cdot \arctg x \cdot dx = \left[ \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x \right]_0^1 =$$

$$\left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

L'illustrazione grafica è riportata in **Figura 3**

**Figura 3**



### Per gli utenti di GeoGebra

Ricordato che la funzione  $\arctg x$  è codificata come  $atan(x)$ , per implementare la funzione integranda scrivere nella barra della formula  $f(x)=x*atan(x)$ , oppure semplicemente  $y=x*atan(x)$ , oppure,  $y=xatan(x)$ .

Per calcolare l'integrale definito scrivere nella barra della formula il comando

**Integrale[f(x),0,1].**

$$9. \int_0^{\frac{1}{2}} \arctg(2x) \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{2}} D(x) \arctg(2x) \cdot dx = \left[ x \cdot \arctg(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{2}{1+4x^2} \cdot dx =$$

$$\left( \frac{1}{2} \cdot \arctg 1 - 0 \right) - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x}{1+4x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \left[ \log(1+4x^2) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log 2$$

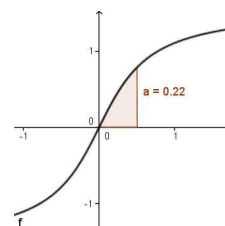
L'illustrazione grafica è riportata in **Figura 4**.

$$10. \int_1^4 \frac{8}{3\sqrt{x}+x} dx$$

Per l'integrale indefinito si deve ricorrere al metodo di integrazione per sostituzione.

Con  $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ . Si ha

**Figura 4**



$$\int \frac{8}{3\sqrt{x}+x} dx = \int \frac{8}{3t+t^2} \cdot 2tdt = 16 \int \frac{tdt}{t(3+t)} = 16 \log|3+t| + c = 16 \log|3+\sqrt{x}| + c$$

Dunque

$$\int_1^4 \frac{8}{3\sqrt{x}+x} dx = \left[ 16 \log|3+\sqrt{x}| \right]_1^4 = 16(\log 5 - \log 4) = 16 \log \frac{5}{4} \approx 3,57$$

**Figura 5**

### Per gli utenti di GeoGebra

Si inserisce la funzione integranda digitando nella barra della formula l'espressione

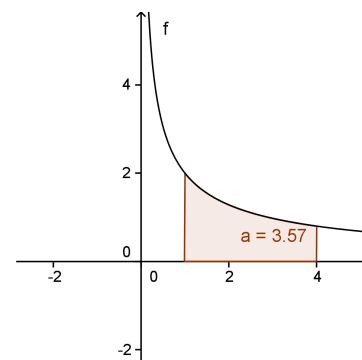
$$y=8/(3*\text{sqrt}(x)+x).$$

Appena inserita l'espressione si ottiene la visualizzazione del diagramma nella finestra dei grafici.

Per il calcolo dell'integrale definito, osservato che GeoGebra ha assegnato il nome f(x) alla funzione integranda inserita, basta digitare nella barra della formula l'espressione

$$\text{Integrale}[f(x),1,4]$$

e confermare con INVIO.



$$11. \int_0^1 \frac{x-x^2}{\sqrt{x+1}} dx$$

L'integrale indefinito si risolve per sostituzione. Poniamo

$$\sqrt{x+1} = t \rightarrow x = t^2 - 1, \text{ e } dx = 2tdt$$

$$\int \frac{x-x^2}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^2-1-(t^2-1)^2}{t} \cdot 2tdt = 2 \int (-t^4+3t^2-2) dt = 2 \left( -\frac{t^5}{5} + t^3 - 2t \right) + c$$

Per il calcolo dell'integrale definito possiamo sfruttare la nuova variabile determinandone gli estremi di integrazione. Si ha

$$x=0 \rightarrow t=1; \quad x=1 \rightarrow t=\sqrt{2}.$$

Pertanto risulta

$$\int_0^1 \frac{x-x^2}{\sqrt{x+1}} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (-t^4+3t^2-2) dt = 2 \left[ -\frac{t^5}{5} + t^3 - 2t \right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$2 \left[ \left( -\frac{4\sqrt{2}}{5} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \right) - \left( -\frac{1}{5} + 1 - 2 \right) \right] =$$

$$\frac{4}{5} (3 - 2\sqrt{2}) \approx 0,137$$

