

Calcolo di integrali definiti

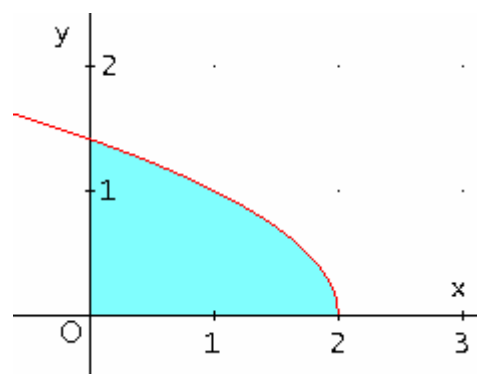
E1) $\int_0^2 \sqrt{2-x} dx$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{2-x} dx = \int (2-x)^{\frac{1}{2}} dx = -\int -(2-x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^2 \sqrt{2-x} dx = \left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = 0 + \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$



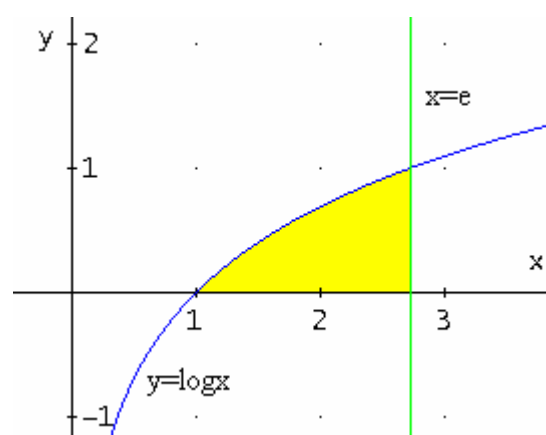
E2) $\int_1^e \log x dx$

Calcolo dell'integrale indefinito. Si procede con il metodo di integrazione per parti.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c$$

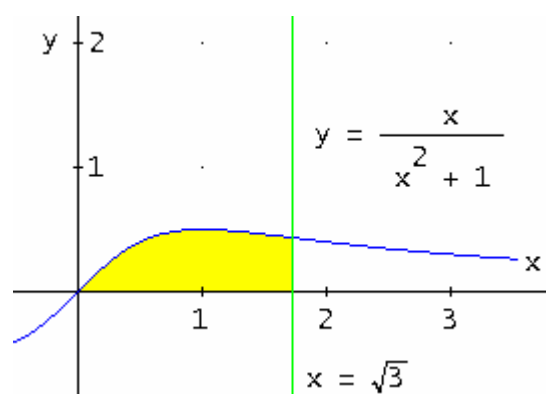
Calcolo dell'integrale definito

$$\int_1^e \log x dx = \left[x(\log x - 1) \right]_1^e = 0 - (-1) = 1$$



E3)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \log 4 = \log 2$$



E4) Provare che risulta $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \frac{4}{15}$

Calcolo dell'integrale indefinito. Si procede per sostituzione ponendo

$$\sqrt{1-x} = t \rightarrow x = 1-t^2 \rightarrow dx = -2t dt$$

$$\int x\sqrt{1-x} dx = \int (1-t^2)t(-2t) dt = -2 \int (t^2 - t^4) dt =$$

$$-2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) + c$$

Calcolo dell'integrale definito.

Senza tornare alla variabile x si possono determinare i valori degli estremi di integrazione per la variabile t.

$$x=0 \rightarrow t=1, \quad x=1 \rightarrow t=0.$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \int_1^0 \varphi(t) dt = \left[-2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \right]_1^0 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

