

Integrali indefiniti

Applicazione del metodo di integrazione per parti

$$1) \int x e^x dx = \int x D(e^x) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x-1) + c$$

$$2) \int (3x-4) e^x dx = \int (3x-4) D(e^x) dx = (3x-4) e^x - 3 \int e^x dx = (3x-4) e^x - 3 e^x + c = e^x (3x-7) + c$$

3) $\int (x^2 - 4x) e^x dx$ Per calcolare questo integrale sarà necessario applicare due volte il processo di integrazione per parti. Riportiamo le elaborazioni senza ulteriori commenti.

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 4x) e^x dx &= \int (x^2 - 4x) D(e^x) dx = (x^2 - 4x) e^x - \int (2x - 4) e^x dx = \\ &= (x^2 - 4x) e^x - \int (2x - 4) D(e^x) dx = (x^2 - 4x) e^x - \left[(2x - 4) e^x - \int 2 e^x dx \right] = \\ &= (x^2 - 4x) e^x - (2x - 4) e^x + 2 e^x + c = e^x (x^2 - 6x + 6) + c \end{aligned}$$

4) $\int x e^{kx} dx$, con $k \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int x e^{kx} dx &= \frac{1}{k} \int x (k e^{kx}) dx = \frac{1}{k} \int x D(e^{kx}) dx = \frac{1}{k} \left[x e^{kx} - \int e^{kx} dx \right] = \frac{1}{k} \left[x e^{kx} - \frac{1}{k} \int k e^{kx} dx \right] = \\ &= \frac{1}{k} \left[x e^{kx} - \frac{1}{k} \cdot e^{kx} \right] + c = \frac{1}{k} \left(x - \frac{1}{k} \right) e^{kx} + c \end{aligned}$$

5) $\int (ax+b) e^{kx} dx$, con $k \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int (ax+b) e^{kx} dx &= \frac{1}{k} \int (ax+b) (k e^{kx}) dx = \frac{1}{k} \int (ax+b) D(e^{kx}) dx = \frac{1}{k} \left[(ax+b) e^{kx} - a \int e^{kx} dx \right] = \\ &= \frac{1}{k} \left[(ax+b) e^{kx} - \frac{a}{k} \int k e^{kx} dx \right] = \frac{1}{k} \left[(ax+b) e^{kx} - \frac{a}{k} \cdot e^{kx} \right] + c = \frac{1}{k} \left(ax + b - \frac{a}{k} \right) e^{kx} + c \end{aligned}$$

6) $\int x^3 e^{x^2} dx$ Per il calcolo dell'integrale si deve scrivere opportunamente la funzione integranda per riconoscere il fattore differenziale. Riportiamo le elaborazioni.

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \int x^2 \cdot (x e^{x^2}) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot (2x e^{x^2}) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot D(e^{x^2}) dx = \frac{1}{2} \left[x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + c \end{aligned}$$

7) $\int (2x^3 + 4x) e^{x^2} dx$ Per il calcolo di questo integrale facciamo riferimento all'integrale calcolato nell'esercizio n.6.

$$\begin{aligned} \int (2x^3 + 4x) e^{x^2} dx &= \int (x^2 + 2) \cdot (2x e^{x^2}) dx = \int (x^2 + 2) \cdot D(e^{x^2}) dx = (x^2 + 2) e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx = \\ &= (x^2 + 2) e^{x^2} - e^{x^2} + c = (x^2 + 1) e^{x^2} + c \end{aligned}$$

8) $\int \frac{e^x (x-1)}{x^2} dx$

L'integrale si calcola decomponendo la funzione integranda nella somma di due funzioni ed applicando ad uno dei due integrali la regola di integrazione per parti.

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2} dx = \int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx = \frac{e^x}{x} - \int e^x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx = \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x^2} dx + \int \frac{e^x}{x^2} dx + c = \frac{e^x}{x} + c$$

- 9) $\int \frac{e^x(x-2)}{x^3} dx$ Questo integrale si calcola con un procedimento analogo a quello seguito nell'esercizio n.8. Riportiamo l'elaborazione senza ulteriori commenti.

$$\int \frac{e^x(x-2)}{x^3} dx = \int \frac{e^x x}{x^3} dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx = \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx = \int \frac{1}{x^2} D(e^x) dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx = \frac{e^x}{x^2} - \int e^x D\left(\frac{1}{x^2}\right) dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx = \frac{e^x}{x^2} - \int e^x D\left(\frac{-2}{x^3}\right) dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx = \frac{e^x}{x^2} + c$$

- 10) Provare che risulta $\int \frac{e^x(x-3)}{x^4} dx = \frac{e^x}{x^3} + c$ Confrontare gli esercizi n.8 e 9.

$$11) \int x e^{-x} dx = \int x D(-e^{-x}) dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c$$

$$12) \int x \log x dx = \int \log x D\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$13) \int x \log^2 x dx = \int \log^2 x \cdot D\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int x \log x dx$$

L'integrale residuo è stato calcolato nel precedente esercizio n.12; pertanto, sfruttando il risultato ottenuto possiamo scrivere:

$$\frac{x^2}{2} \log^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right) + c = \frac{x^2}{4} (2 \log^2 x - 2 \log x + 1) + c$$

$$14) \int x \arctg x dx = \int \arctg x \cdot D\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + c =$$

$$\frac{x^2 + 1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + c$$

- 15) $\int e^x \sen x dx$ Per questo integrale si applica due volte il metodo di integrazione per parti per ricondursi allo stesso ...

$$\int e^x \sen x dx = e^x \sen x - \int e^x \cos x dx = e^x \sen x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\sen x) dx \right] =$$

$$e^x \sen x - e^x \cos x - \int e^x \sen x dx \quad \text{Trasportiamo ora al primo membro l'integrale residuo e concludiamo:}$$

$$2 \int e^x \sen x dx = e^x \sen x - e^x \cos x + c' \rightarrow \int e^x \sen x dx = \frac{e^x}{2} (\sen x - \cos x) + c$$