

Esercitazione con una funzione definita per casi

In relazione alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{con } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{con } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \sqrt{x+6} & \text{con } 1 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{risolvere i quesiti che seguono.}$$

Q1- Rappresentare nel riferimento cartesiano xOy il diagramma della funzione e precisare se la stessa è continua.

Q2- Studiare l'integrale definito $\int_0^3 f(x)dx$ e precisare cosa rappresenta il suo valore.

Q3-Esplicitare la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, con $0 \leq x \leq 3$ e stabilire se la stessa è continua e derivabile.

Soluzione

Q1- La funzione è definita per casi e si riconosce che è limitata in tutto il suo dominio. In ciascuno degli intervalli $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $]1; 3]$ è continua. Per stabilire se la stessa è continua anche nei punti...

Q2- Poiché la funzione è definita in modo diverso in ciascuno dei tre intervalli $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $]1; 3]$, lo studio dell'integrale definito richiesto dovrà essere affrontato considerando la funzione separatamente in ciascuno dei suddetti intervalli. Precisamente si ha:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$$

D'altra parte, ...

Q3- Per esplicitare della funzione al variare di x nel dominio $[0;3]$ è necessario sviluppare un lavoro puntuale in ciascuno dei tre intervalli $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $]1; 3]$ e sfruttare i valori dei integrali definiti calcolati nel precedente quesito Q2.

Primo intervallo...

Continuità e derivabilità.

La funzione è continua in tutto il suo dominio, come si riconosce immediatamente analizzando i valori nei punti di raccordo e quelli dei limiti laterali. Per quanto concerne la derivabilità, la funzione non è derivabile nei punti $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, nei quali...

Rappresentazione della funzione F(x)

...