

Esercitazione con una funzione definita per casi

In relazione alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{con } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{con } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \sqrt{x+6} & \text{con } 1 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{risolvere i quesiti che seguono.}$$

Q1- Rappresentare nel riferimento cartesiano xOy il diagramma della funzione e precisare se la stessa è continua.

Q2- Studiare l'integrale definito $\int_0^3 f(x)dx$ e precisare cosa rappresenta il suo valore.

Q3-Esplicitare la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, con $0 \leq x \leq 3$ e stabilire se la stessa è continua e derivabile.

Soluzione

Q1- La funzione è definita per casi e si riconosce che è limitata in tutto il suo dominio. In ciascuno degli intervalli $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $[1; 3]$ è continua. Per stabilire se la stessa è continua anche nei punti

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ si devono studiare i limiti laterali e confrontare i valori tra loro e con i rispettivi valori assunti dalla funzione in detti punti.

Studio nel punto $x_1 = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} (1 - x^2) = \frac{3}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (2x + 1) = 2 \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Conclusione- La funzione nel punto $x_1 = \frac{1}{2}$ è continua solo a sinistra; nel punto presenta una discontinuità di prima specie con salto

$$\sigma_1 = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Studio nel punto $x_2 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3 = f(1); \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x + 6} = \sqrt{7} \neq f(1)$$

Conclusione- Nel punto $x_2 = 1$ la funzione presenta una discontinuità di prima specie con salto

$$\sigma_2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - f(1) = \sqrt{7} - 3.$$

Diagramma della curva (vedere la Figura 1)

Comandi in GeoGebra

Comando per l'intervallo $\left[0; \frac{1}{2}\right]$: `curva[t, 1-t^2, t, 0, 0.5]`

Comando per l'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$: `curva[t, 2t+1, t, 0.5, 1]`

Comando per l'intervallo $]1; 3]$: `curva[t, (t+6)^0.5, t, 1, 3]`

Q2- Poiché la funzione è definita in modo diverso in ciascuno dei tre intervalli $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $]1; 3]$, lo studio dell'integrale definito richiesto dovrà essere affrontato considerando la funzione separatamente in ciascuno dei suddetti intervalli. Precisamente si ha:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

D'altra parte, abbiamo riconosciuto che la funzione presenta nei punti $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ delle discontinuità di prima specie e per il secondo ed il terzo integrale, essendo impropri, si dovranno studiare dei limiti di altrettanti integrali definiti della funzione relativi ad intervalli chiusi in cui la funzione è continua.

Si ha:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24};$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 (2x+1) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[x^2 + x \right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ 2 - \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \right] \right\} = \frac{5}{4};$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \sqrt{x+6} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{2}{3} (x+6)^{\frac{3}{2}} \right]_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} \left[9^{\frac{3}{2}} - (7+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} (27 - 7\sqrt{7})$$

Poiché i tre integrali studiati convergono tutti si conclude che **la funzione in esame è integrabile** in senso generalizzato su tutto l'intervallo $[0; 3]$ e risulta

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{11}{24} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} (27 - 7\sqrt{7}) = \frac{41}{24} + \frac{2}{3} (27 - 7\sqrt{7})$$

Il valore ottenuto rappresenta l'area del sottografico della funzione considerata.

Q3- Per esplicitare della funzione al variare di x nel dominio $[0; 3]$ è necessario sviluppare un lavoro puntuale in ciascuno dei tre intervalli $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $]1; 3]$ e sfruttare i valori dei integrali definiti calcolati nel precedente quesito Q2.

Primo intervallo

$$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (1-t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = x - \frac{x^3}{3}$$

Secondo intervallo

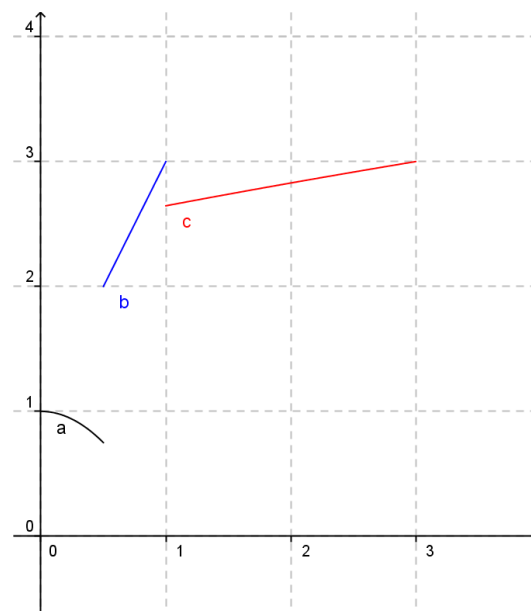


Figura 1-Una funzione con due punti di discontinuità di prima specie

$$x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right] \rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^x (2t+1) dt = \frac{11}{24} + \left[t^2 + t \right]_{\frac{1}{2}}^x = -\frac{7}{24} + x^2 + x;$$

Terzo intervallo

$$x \in]1; 3] \rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x \sqrt{t+6} dt = \frac{41}{24} + \frac{2}{3} \left[(t+6)^{\frac{3}{2}} \right]_1^x = \frac{41}{24} - \frac{2}{3} \cdot 7\sqrt{7} + \frac{2}{3} (x+6)^{\frac{3}{2}}$$

Possiamo riassumere la forma della funzione ottenuta come segue:

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} & \text{con } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{24} + x^2 + x & \text{con } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{41}{24} - \frac{2}{3} \cdot 7\sqrt{7} + \frac{2}{3} (x+6)^{\frac{3}{2}} & \text{con } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Continuità e derivabilità.

La funzione è continua in tutto il suo dominio, come si riconosce immediatamente analizzando i valori nei punti di raccordo e quelli dei limiti laterali. Per quanto concerne la derivabilità, la funzione

non è derivabile nei punti $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, nei quali non esiste la

derivata prima. Infatti risulta:

$$F'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}; \quad F'_+\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

$$F'_-(1) = 3; \quad F'_+(1) = \sqrt{7}.$$

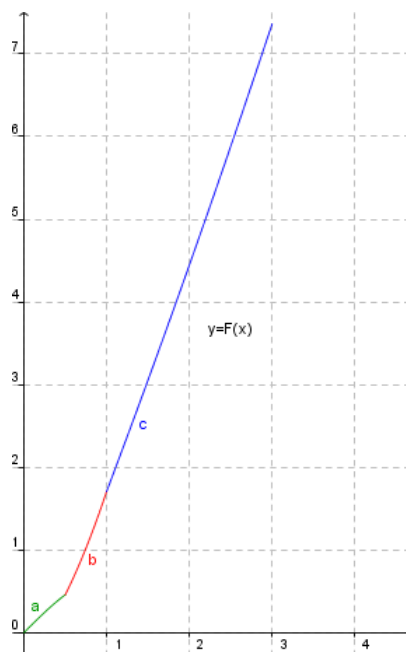


Figura 2-Funzione integrale $y=F(x)$

Rappresentazione della funzione $F(x)$

Riportiamo i comandi inseriti per la rappresentazione della curva integrale $y=F(x)$.

Primo intervallo: `curva[t,t^3/3,t,0,0.5]`

Secondo intervallo: `curva[t,-7/24+t^2+t,t,0.5,1]`

Terzo intervallo:

`curva[t,41/24-14sqrt(7)/3+2*(t+6)^1.5/3,t,1,3]`

Analizzando la Figura 2 si osserva l'evidente angolosità nel punto $x=1/2$; per contro, nel punto $x=1$, sembra che la funzione sia derivabile; in realtà, come già precisato, non esiste la derivata prima nel punto e se si effettua un opportuno ingrandimento si può notare la diversa inclinazione dei due rami in un intorno del suddetto punto. In Figura 3 è riportato un ingrandimento che consente di percepire l'angolosità esistente anche in corrispondenza del punto $(1;F(1))$.

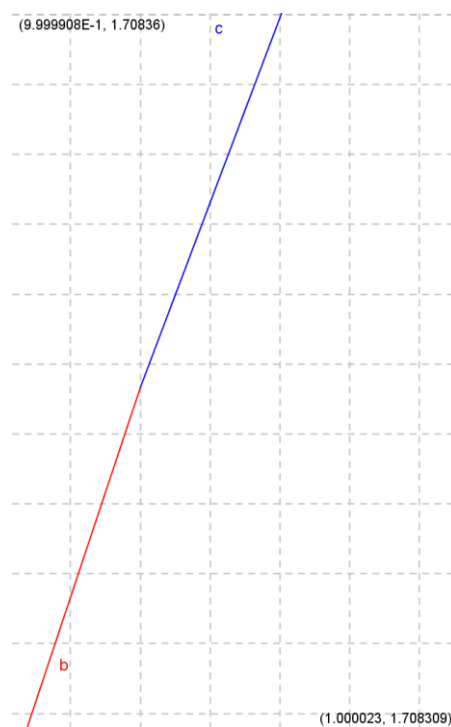


Figura 3-Ingrandimento del diagramma della funzione integrale $y=F(x)$. In questa figura è riconoscibile l'angolosità nel punto di raccordo $x=1$