Tema: Analisi Matematica. Integrazione indefinita

Applicazione del metodo di integrazione per sostituzione

Premessa teorica

Ricordiamo che un integrale indefinito la cui funzione integranda sia piuttosto complessa a volte può essere calcolato ricorrendo alla sostituzione di variabile per ridurre la forma analitica della funzione integranda ad una più accessibile. Sia

$\int f(x)dx$, con f:A⊆R→R l'integrale da calcolare.

Se esiste una funzione una φ: B⊆R→A che sia biunivoca e derivabile, posto $x=\varphi(t)$, sussiste la seguente uguaglianza:

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$, nella quale il fattore dx è stato sostituito dal differenziale primo della funzione φ(t).

Se con la sostituzione effettuata si riesce a calcolare l'integrale,

$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(t)+c$,

si può utilizzare l'espressione della funzione inversa $t=\varphi^{-1}(x)$, che esiste perché φ è biunivoca per ipotesi, per ritornare alla variabile indipendente originaria x. In definitiva sussistono le seguenti uguaglianze:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(t)+c = F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+c$$

*** ***

Calcolare gli integrali indefiniti che seguono utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione.

1. $\int x\cdot e^{3x-1}dx$ — R: $\frac{1}{9}(3x-1)\cdot e^{3x-1}+c$
2. $\int x\cdot\sqrt{x+1}dx$ — R: $\frac{2}{15}\left(3x^2+x-2\right)\cdot\sqrt{x+1}+c$
3. $\int\frac{2x-3}{\sqrt{1-x}}dx$ — R: $\frac{2(5-2x)}{3}\cdot\sqrt{1-x}+c$
4. $\int x(4x+3)^5\,dx$ — R: $\frac{(4x+3)^7}{112}-\frac{(4x+3)^6}{32}+c$
5. $\int\frac{dx}{1+(5x+7)^2}$ — R: $\frac{1}{5}arctg(5x+7)+c$
6. $\int\frac{dx}{2+(2x-1)^2}$ — R: $\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)+c$
7. $\int\frac{dx}{25x^2+10x+4}$ — R: $\frac{\sqrt{3}}{15}arctg\left(\frac{5x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$