

Integrali indefiniti di funzioni irrazionali fratte

Studio dei due integrali indefiniti

$$\text{a) } \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad ; \quad \text{b) } \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Risoluzione

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{-x(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-x(-x^2+1-1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int -x \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \\ &= \int -x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx + \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2} + c - \frac{1}{3} (2+x^2) \sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I_4 &= \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{-x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \frac{1-x^4-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1-x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \arcsen(x) - \int \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(x) + I_4^* \quad \text{Occupiamoci dell'integrale residuo} \end{aligned}$$

$$I_4^* = - \int \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int \sqrt{1-x^2} (1+x^2) dx \quad \text{procedendo con la sostituzione } x = \text{sen}(t) .$$

Osserviamo che sussistono le seguenti relazioni:

$$dx = \cos(t) dt, \quad (*)$$

$$t = \arcsen(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ da cui } \cos(t) > 0 \text{ e quindi } \cos(t) = \sqrt{1-\text{sen}^2(t)} = \sqrt{1-x^2} \quad (**)$$

<<

Nel corso delle elaborazioni saranno applicate le formule di duplicazione del seno e del coseno e altre da queste dedotte, che riportiamo di seguito.

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\text{sen}^2 \alpha \quad (\text{d.1}) \text{ (formula di duplicazione del coseno);}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \quad (\text{d.2}); \quad \text{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad (\text{d.3})$$

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \quad (\text{d.4}) \text{ (formula di duplicazione del seno)}$$

>>

$$\begin{aligned} I_4^* &= - \int \sqrt{1-x^2} (1+x^2) dx = - \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} (1+\text{sen}^2 t) \cos t dt = - \int (1+\text{sen}^2 t) \cos^2 t dt = - \int \cos^2 t dt - \int \text{sen}^2 t \cdot \cos^2 t dt = \\ &= - \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt - \frac{1}{4} \int (2\text{sen}t \cdot \cos t)^2 dt = - \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2\cos(2t) dt - \frac{1}{4} \int \text{sen}^2(2t) dt = \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2t) - \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2t) - \frac{1}{8} \int dt + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \int 4 \cdot \cos(4t) dt =$$

$$-\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2t) - \frac{t}{8} + \frac{1}{32} \text{sen}(4t) + c = -\frac{5t}{8} - \frac{1}{4} \cdot \text{sen}(2t) + \frac{1}{32} \text{sen}(4t) + c$$

Si noti ora che dalla (***) e dalle formule di duplicazione del seno e del coseno si deduce che

$$\text{sen}(2t) = 2\text{sen}(t)\cos(t) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2};$$

$$\frac{1}{32} \text{sen}(4t) = \frac{1}{32} \cdot 2\text{sen}(2t)\cos(2t) = \frac{1}{16} \cdot 2\text{sen}(t)\cos(t) \cdot (1 - 2\text{sen}^2 t) = \frac{1}{8} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2);$$

quindi

$$I_4^* = -\frac{5}{8} \arcsen x - \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) + c = -\frac{5}{8} \arcsen x - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (3x + 2x^3) + c$$

Conclusione - Per l'integrale indefinito in esame risulta

$$I_4 = \int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen(x) - \frac{5}{8} \arcsen x - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (3x + 2x^3) + c = \frac{3}{8} \arcsen x - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (3x + 2x^3) + c$$

Proposta di lavoro

Dimostrare che le funzioni derivate prime delle funzioni

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{3}(2+x^2)\sqrt{1-x^2}, \quad \Phi_2(x) = \frac{3}{8} \arcsen x - \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot (3x + 2x^3)$$

sono rispettivamente

$$\Phi_1'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \Phi_2'(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}.$$