

Esercitazione sugli integrali definiti

(Applicazione del metodo di sostituzione)

Studio degli integrali: a) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$, b) $\int_0^{\frac{7}{8}} \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$, c) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Elaborazioni

a) L'integrale si calcola per sostituzione. Osserviamo che la funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione quindi l'integrale definito esiste ed assume un valore positivo. Per il calcolo dell'integrale procediamo per sostituzione ponendo $\sqrt{x} = t$, da cui si ha

$x = t^2$, $dx = 2t dt$. Possiamo definire gli estremi di integrazione per la nuova variabile t .

$x=1 \rightarrow t=1; x=3 \rightarrow t=\sqrt{3}$. Procediamo con il calcolo.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t(t^2+1)} \cdot 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$2 \left[\arctg(t) \right]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left[\arctg(\sqrt{3}) - \arctg(1) \right] = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\frac{\pi}{6} = 0,523598...$$

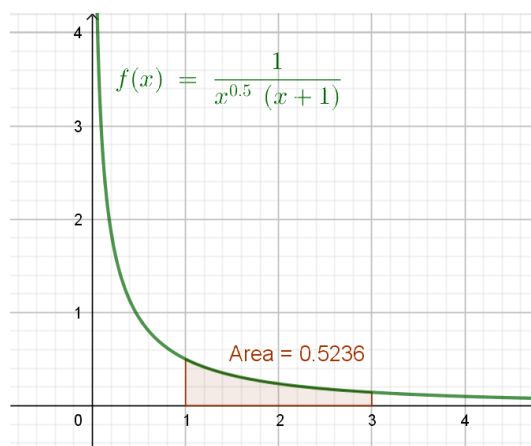


Figura 1- La funzione è definita nell'intervallo $]0;+\infty[$ e il suo diagramma ha come asintoti gli assi coordinati.

In Figura 1 è riportato il diagramma della funzione e illustrato il significato geometrico dell'integrale definito calcolato.

b) L'integrale $\int_0^{\frac{7}{8}} \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$ si calcola per sostituzione ponendo $\sqrt{1-x} = t$. La funzione è continua nell'intervallo di integrazione ed è non negativa; il valore dell'integrale sarà un numero positivo. Si ha:

$x = 1 - t^2$; $dx = -2t dt$. Per gli estremi di integrazione si ha:

$$x = 0 \rightarrow t = 1; x = \frac{7}{8} \rightarrow t = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Procediamo con il calcolo.

$$\int_0^{\frac{7}{8}} \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{1-t^2}{t} \cdot (-2t dt) = -2 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{4}} (1-t^2) dt =$$
$$2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^1 (1-t^2) dt = 2 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^1 = 2 \left\{ \left[1 - \frac{1}{3} \right] - \left[\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^3 \right] \right\} =$$
$$... = \frac{64 - 23\sqrt{2}}{48} = 0,655689....$$

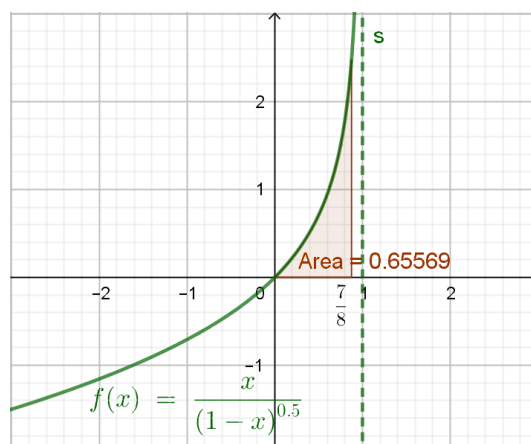


Figura 2- La funzione è definita nell'intervallo $] -\infty; 1[$.

In Figura 2 è riportato il diagramma della funzione con indicazione dell'asintoto verticale $s: x=1$ e illustrato il significato geometrico dell'integrale definito calcolato.

c) Per calcolare l'integrale trasformeremo innanzitutto la funzione integranda, quindi procederemo per sostituzione.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\arcsen(x) \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \left[\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsen(0) \right] - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx.$$

L'integrale indefinito residuo si calcola per sostituzione ponendo $x = \sin(t)$. Si ha

$$x = \sin(t) \rightarrow dx = \cos(t) dt;$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c$$

Per il calcolo dell'integrale definito determiniamo gli estremi di integrazione nella nuova variabile t .

$$x = \sin(t) \rightarrow t = \arcsen(x), \text{ quindi}$$

$$x = 0 \rightarrow t = \arcsen(0) = 0;$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t = \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Segue il calcolo del termine mancante :

$$-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) dt = -\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Conclusione

L'integrale definito in esame vale

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi-2}{8} = 0,142699...$$

In Figura 3 è riportato il diagramma della funzione con indicazione dei due asintoti verticali $s_1: x=-1$, $s_2: x=1$ ed è illustrato il significato geometrico dell'integrale definito calcolato.

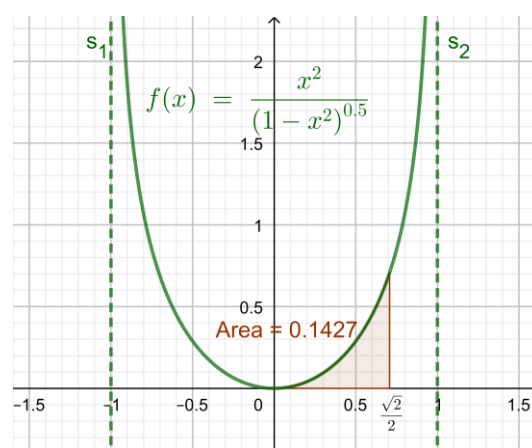


Figura 3- La funzione è definita nell'intervallo $] -1;1[$ ed è pari.