

Integrale indefinito di una funzione irrazionale fratta

Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x+11}{\sqrt{x^2+5}} dx$.

Elaborazioni

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+11}{\sqrt{x^2+5}} dx &= \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}} dx + 11 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int 2x(x^2+5)^{-\frac{1}{2}} dx + 11 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx = \\ &= \frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 11 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx = \\ &= 2\sqrt{x^2+5} + 11 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx\end{aligned}$$

Per l'integrale residuo $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx$ procediamo come segue

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}} dx, \text{ quindi poniamo } \frac{x}{\sqrt{5}} = t, \text{ da cui } dx = \sqrt{5} dt \text{ e si ha la forma}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \sqrt{5} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt. \text{ A questo punto effettuiamo la sostituzione } \sqrt{1+t^2} = t-u \rightarrow$$

$$1+t^2 = t^2 - 2ut + u^2 \rightarrow t = \frac{u^2-1}{2u}, \text{ da cui } dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2u \cdot u - (u^2-1) \cdot 1}{u^2} du \rightarrow dt = \frac{u^2+1}{2u^2} du;$$

si ha anche: $\sqrt{1+t^2} = t-u = \frac{u^2-1}{2u} - u = -\frac{u^2+1}{2u}$, osserviamo che $u < 0$ e risulta $u = t - \sqrt{1+t^2}$.

Per l'integrale I si ha:

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{\frac{u^2+1}{2u}} \cdot \frac{u^2+1}{2u^2} du = \int -\frac{1}{u} du = -\ln(|u|) + c = -\ln\left(\left|t - \sqrt{1+t^2}\right|\right) + c = -\ln\left(\sqrt{1+t^2} - t\right) + c = \\ &= -\ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c = -\ln\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{5}} - \frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c\end{aligned}$$

Conclusione

L'integrale indefinito in esame vale

$$\int \frac{2x+11}{\sqrt{x^2+5}} dx = 2\sqrt{x^2+5} - 11 \cdot \ln\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{5}} - \frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c$$