

Integrazione per sostituzione

Studio dell'integrale indefinito

$$\int (ax+b)^n (px+q) dx, \text{ con } a \neq 0, p, b, q, n \in \mathbb{R}.$$

Elaborazioni

Casi particolari

1. Se $p=0$ l'integrale è immediato. Infatti:

1.1 con $n \neq -1$ si ha $q \int (ax+b)^n dx = \frac{q}{a} \int a(ax+b)^n dx = \frac{q}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c;$

1.2 con $n=-1$ l'integrale diventa

$$q \int (ax+b)^{-1} dx = q \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{q}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{q}{a} \cdot \ln(|ax+b|) + c$$

2. Se $b=0$ l'integrale è ancora immediato. Infatti:

2.1 con $n \neq -2$ e $n \neq -1$

$$\int a^n x^n (px+q) dx = a^n \int (px^{n+1} + qx^n) dx = a^n p \frac{x^{n+2}}{n+2} + a^n q \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (*)$$

2.2 con $n=-1$ si ha

$$\int a^{-1} x^{-1} (px+q) dx = \frac{1}{a} \int \frac{px+q}{x} dx = \frac{1}{a} \int \left(p + \frac{q}{x} \right) dx = \frac{1}{a} \left(px + q \ln(|x|) \right) + c$$

2.2 con $n=-2$ l'integrale diventa

$$\int a^{-2} x^{-2} (px+q) dx = a^{-2} \int \left(\frac{p}{x} + qx^{-2} \right) dx = \frac{p}{a^2} \ln(|x|) - \frac{q}{a^2 x} + c$$

3. Se $b \neq 0$ l'integrale si calcola velocemente per **sostituzione** ponendo $ax+b=t$, da cui $x = \frac{t-b}{a}$ e

$dx = \frac{1}{a} dt$. L'integrale assume la seguente forma

$$\int t^n \left(p \cdot \frac{t-b}{a} + q \right) \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a^2} \int t^n (pt - pb + aq) dt = \frac{1}{a^2} \int (pt^{n+1} + (-pb + aq)t^n) dt$$

Distinguiamo i seguenti casi

3.1 Se $n \neq -2$ e $n \neq -1$ allora l'integrale è uguale a $\frac{p}{a^2} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} + \frac{aq-pb}{a^2} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + c$ e tornando alla variabile x per l'integrale indefinito in esame si ottiene la forma

$$\frac{p}{a^2} \cdot \frac{(ax+b)^{n+2}}{n+2} + \frac{aq-pb}{a^2} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad (**).$$

Osservazione - Il lettore verifichi che dalla (**) ponendo $b=0$ si ottiene la (*), quindi il caso 2.1 è un caso particolare del 3.1.

3.2 Se $n=-2$ allora l'integrale diventa

$$\int (ax+b)^{-2} (px+q) dx = \int \frac{px+q}{(ax+b)^2} dx = \int \frac{px+q}{a^2 x^2 + 2abx + b^2} dx$$

a questo punto si deve trasformare la frazione integranda determinando le due costanti k, h

che verificano l'uguaglianza $\frac{px+q}{a^2 x^2 + 2abx + b^2} = \frac{k(2a^2 x + 2ab) + h}{a^2 x^2 + 2abx + b^2}$; questa uguaglianza si

verifica solo se $2a^2 k = p$, quindi se $k = \frac{p}{2a^2}$, e $2kab + h = q$, quindi se $h = q - 2kab =$

$q - \frac{pb}{a}$. Ciò fatto, l'integrale si decompone nella somma di due integrali come segue

$$\begin{aligned} \int \frac{px+q}{a^2 x^2 + 2abx + b^2} dx &= k \int \frac{2a^2 x + 2ab}{a^2 x^2 + 2abx + b^2} dx + \int \frac{h}{(ax+b)^2} dx = k \cdot \ln((ax+b)^2) + \\ h \int (ax+b)^{-2} dx &= 2k \cdot \ln(|ax+b|) + \frac{h}{a} \int (ax+b)^{-2} \cdot a dx = 2k \cdot \ln(|ax+b|) - \frac{h}{a(ax+b)} + c \end{aligned}$$

3.3 Se $n=-1$ l'integrale diventa

$$\int \frac{px+q}{ax+b} dx \quad \text{Si esegue la divisione tra numeratore e denominatore e si decompone la}$$

$$\text{frazione come segue } \int \left(\frac{p}{a} + \frac{q - \frac{pb}{a}}{ax+b} \right) dx = \frac{p}{a} x + \frac{aq - pb}{a} \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{p}{a} x + \frac{aq - pb}{a^2} \int \frac{adx}{ax+b} =$$

$$\frac{p}{a} x + \frac{aq - pb}{a^2} \cdot \ln(|ax+b|) + c$$

Esercizi svolti

1. $\int x(3x+10)^5 dx$ Con $3x+10=t$ si ha $x = \frac{t-10}{3}$ e $dx = \frac{1}{3} dt \rightarrow$

$$\int x(3x+10)^5 dx = \int \frac{t-10}{3} t^5 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int (t^6 - 10t^5) dt = \frac{1}{9} \left(\frac{t^7}{7} - 10 \cdot \frac{t^6}{6} \right) + c = \frac{1}{63} t^7 - \frac{5}{27} t^6 + c =$$

$$\frac{1}{63} (3x+10)^7 - \frac{5}{27} (3x+10)^6 + c$$

2. $\int (3-4x)^5 (x+1) dx$ Con $3-4x=t$ si ha $x = \frac{3-t}{4}$ e $dx = -\frac{1}{4} dt \rightarrow$

$$\int (3-4x)^5 (x+1) dx = -\frac{1}{4} \int t^5 \left(\frac{3-t}{4} + 1 \right) dt = -\frac{1}{16} \int (7t^5 - t^6) dt = -\frac{1}{16} \left(\frac{7}{6} t^6 - \frac{t^7}{7} \right) + c =$$

$$\frac{(3-4x)^7}{112} - \frac{(3-4x)^6}{96} + c$$

3. $\int (x-1)\sqrt{2x-5} dx$ Ponendo $\sqrt{2x-5} = t$ si ricava $x = \frac{t^2+5}{2}$, da cui $dx = t dt$.

$$\int (x-1)\sqrt{2x-5} dx = \int \left(\frac{t^2+5}{2} - 1 \right) t \cdot t dt = \frac{1}{2} \int (t^4 + 3t^2) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^5}{5} + t^3 \right) + c =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(\sqrt{2x-5})^5}{5} + (\sqrt{2x-5})^3 \right) + c = \frac{1}{10} (2x-5)^2 \sqrt{2x-5} + \frac{1}{2} (2x-5) \sqrt{2x-5} + c =$$

$$\frac{x}{5} (2x-5) \sqrt{2x-5} + c$$

4. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}} dx$ Si affronta velocemente l'integrale con la sostituzione $\sqrt[3]{1-x} = t$ da cui $x = 1-t^3$ e $dx = -3t^2 dt$.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}} dx = \int \frac{1-t^3+1}{t} (-3t^2) dt = -3 \int (2t - t^4) dt = -3 \left(t^2 - \frac{t^5}{5} \right) + c =$$

$$-3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2} + \frac{3}{5} \sqrt[3]{(1-x)^5} + c = \frac{3}{5} (1-x) \sqrt[3]{(1-x)^2} - 3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2} + c$$

Osservazione

Per gli integrali svolti negli esempi n.3 e 4, se vengono scritti rispettivamente nelle forme

$\int (x-1)(2x-5)^{\frac{1}{2}} dx$, $\int (x+1)(1-x)^{-\frac{1}{3}} dx$, poiché rientrano nel modello esaminato $\int (ax+b)^n (px+q) dx$, si possono scrivere i risultati applicando la formula (**) ottenuta nella trattazione del punto 3.1.

Esercizi proposti

Applicando le formule dimostrate sopra o servendosi del metodo di integrazione per sostituzione, verificare che risulta

1. $\int x(x-1)^5 dx = \frac{1}{7}(x-1)^7 + \frac{1}{6}(x-1)^6 + c$
2. $\int (2x-5)(3x+1)^4 dx = \frac{1}{27}(3x+1)^6 - \frac{17}{45}(3x+1)^5 + c$
3. $\int (11x+5)(2x-3)^{10} dx = \frac{11}{48}(2x-3)^{12} + \frac{43}{44}(2x-3)^{11} + c$
4. $\int (3-2x)^{10}(x-3) dx = -\frac{1}{48}(3-2x)^{12} - \frac{3}{11}(3-2x)^{11} + c$

$$5. \int (2x-11)^4 (x+3) dx = \frac{1}{24}(2x-11)^6 + \frac{17}{8}(2x-11)^5 + c$$

$$6. \int \sqrt[4]{4x-1} \cdot (3x+2) dx = \frac{1}{12}(4x-1)^{\frac{9}{4}} + \frac{11}{20}(4x-1)^{\frac{5}{4}} + c, \text{ si noti che } \sqrt[4]{4x-1} \cdot (3x+2) = (4x-1)^{\frac{1}{4}} \cdot (3x+2), \text{ quindi si può porre } 4x-1=t.$$

$$7. \int \frac{5x-6}{\sqrt[3]{10x-9}} dx = \frac{3}{100}(10x-9)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{40}(10x-9)^{\frac{2}{3}} + c, \quad \text{si noti che } \frac{5x-6}{\sqrt[3]{10x-9}} = (10x-9)^{-\frac{1}{3}}(5x-6);$$

porre $10x-9=t$ e procedere.