

Sulla funzione integrale

Considerata una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a;b]$, con $a \leq b$, continua, esiste l'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$. Sussiste la seguente

Definizione - Si chiama **funzione integrale della funzione f di punto iniziale a** la seguente

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

con x variabile nell'intervallo $[a;b]$.

Nella definizione si è precisato “**di punto iniziale a** ” perché si può scegliere come primo estremo di integrazione, cioè come punto fisso, un qualsiasi punto $x_0 \in [a;b]$ e si ottiene comunque una funzione integrale associata alla f ,

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad (2)$$

che differisce però dalla precedente per una costante. Ciò è una diretta conseguenza delle proprietà dell'integrale definito.

Nella definizione (2) il punto x può variare su tutto l'intervallo $[a;b]$.

Sussiste il seguente

Teorema (di Torricelli⁽¹⁾- Barrow⁽²⁾)

La funzione integrale di una funzione continua $f : [a;b] \rightarrow R$, qualunque sia il punto iniziale $x_0 \in [a;b]$, è derivabile in ogni punto x dell'intervallo e la sua derivata prima coincide con la funzione $f(x)$.
Dunque

$$F'(x) = \Phi'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a;b].$$

Dimostrazione

Facciamo riferimento alla definizione (2).

Con $x \in [a;b]$ e Δx reale tale che $x + \Delta x$ sia ancora un punto di $[a;b]$, dobbiamo studiare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

Osserviamo che

⁽¹⁾ Torricelli Evangelista (1608-1647)- Fisico e matematico fu allievo di Galileo Galilei.

⁽²⁾ Barrow Isaac (1630-1677) Matematico inglese fu maestro di Newton.

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt ; \quad (4)$$

Dalle espressioni (2) e (4) si deduce che

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \quad (5)$$

A questo punto, per il teorema della media integrale applicato all'intervallo $(x; x + \Delta x)^{(3)}$, sappiamo che esiste almeno un punto c appartenente a detto intervallo per il quale si verifica l'uguaglianza

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \cdot \Delta x,$$

quindi possiamo scrivere

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \quad (6)$$

Per quanto concerne il limite residuo facciamo notare che se $\Delta x \rightarrow 0$ allora $x + \Delta x \rightarrow x$, quindi anche il punto $c \rightarrow x$ e poiché per ipotesi la funzione f è continua nell'intervallo $[a; b]$ si deduce che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Il valore $f(x)$ del limite ottenuto evidentemente è un numero reale e poiché rappresenta anche il limite del rapporto incrementale (3) si conclude che la funzione integrale $\Phi(x)$ è derivabile nel punto x e risulta $\Phi'(x) = f(x)$. C.V.D.

Funzioni ottenute da integrali definiti

Relativamente alla funzione continua $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ vogliamo vedere cosa succede se si considerano integrali del tipo

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \quad (7)$$

dove gli estremi di integrazione $\alpha(x), \beta(x)$ sono funzioni continue a loro volta dipendenti da x che variando rispettivamente in opportuni sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ assumono valori appartenenti all'intervallo $[a; b]$. Evidentemente il risultato dell'integrale (7) sarà variabile e dipende, oltre che dalla struttura della funzione $f(x)$, anche da quelle delle funzioni $\alpha(x), \beta(x)$; dunque l'integrale (7) descrive una nuova funzione della variabile x . Indichiamo con

$$\Gamma(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \quad (8)$$

⁽³⁾ In questo caso per l'intervallo di estremi $x, x + \Delta x$ abbiamo utilizzato il simbolo delle parentesi tonde $(...;...)$ e non il classico $[...;...]$ perché dei due punti estremi non si conosce quale sia il maggiore. Quella utilizzata è una convenzione in matematica da sfruttare tutte le volte che si presenta l'indecisione suddetta.

questa funzione, **che diremo essere stata ottenuta tramite l'operazione di integrazione definita** a partire dalla funzione integranda $f(x)$, con $f:[a;b] \rightarrow R$, continua, con estremi $\alpha(x)$, $\beta(x)$, funzioni continue i cui valori appartengono all'intervallo $[a;b]$.

Si badi che le due funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ non necessariamente devono avere come variabile indipendente x ; potrebbe risultare $\alpha(u)$, $\beta(v)$, con u e v variabili nei domini A , B , cioè che risulti

$$\alpha: u \in A \rightarrow [a;b] \text{ e } \beta: v \in B \rightarrow [a;b], \text{ con } A \subseteq R, B \subseteq R; \quad (9)$$

importante è che siano continue e che il loro codominio sia un sottoinsieme dell'intervallo $[a;b]$ di definizione della funzione integranda f .

Non chiameremo $\Gamma(x)$ funzione integrale della funzione f perché vogliamo distinguerla dalle funzioni definite dalle forme (2) e (3) dove un estremo di integrazione è fisso e l'altro è x , le quali hanno la proprietà dichiarata nel precedente teorema. Questa nuova funzione non possiede affatto la suddetta proprietà ed è definita tra l'altro in un dominio opportuno C da determinare caso per caso.

Cosa si può affermare sulla derivabilità della funzione $\Gamma(x)$?

Si risponde a questa domanda facendo ricorso al **teorema sulla derivata di una funzione composta**.

Sia $\Phi(t)$ una qualsiasi primitiva della funzione $f(t)$. Con le ipotesi poste, la funzione $\Gamma(x)$ avrà la seguente forma

$$\Gamma(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = [\Phi(t)]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = \Phi(\beta(x)) - \Phi(\alpha(x)) \quad (10)$$

Per quanto concerne la derivabilità $\Gamma(x)$, per il teorema sulla derivata di una funzione composta si deve espressamente richiedere che siano derivabili le funzioni interne $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, oltre che la derivabilità della funzione esterna $\Phi(t)$. Il teorema riportato sopra garantisce che è derivabile la funzione $\Phi(t)$, ma nelle ipotesi fatte sulle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ si è precisato che esse possono essere due funzioni continue comunque definite con il solo vincolo che il loro codominio sia un sottoinsieme di $[a;b]$.

Ebbene, se anche le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono derivabili nei rispettivi domini, allora risulterà derivabile la funzione $\Gamma(x)$ e si avrà

$$\Gamma'(x) = \Phi'(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - \Phi'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) \quad (11)$$

Com'è evidente dalla (11), *l'espressione della funzione $\Gamma'(x)$, dove esiste, in generale non coinciderà con quella della funzione integranda di partenza $f(x)$ e ciò spinge a **non denominare $\Gamma(x)$ come "funzione integrale della funzione $f(x)$ "***, ma semplicemente come una funzione ottenuta dalla f e da altre funzioni (come lo sono $\alpha(x)$ e $\beta(x)$) tramite operazioni integrali.

Per esempi ed esercizi si rinvia al documento completo

[Note teoriche e 10 esercizi sulla funzione integrale](#)