

Sulla funzione integrale

Sviluppo di 10 esercizi sull'applicazione della **funzione integrale** e **relative note teoriche**

Proposta di ulteriori 5 esercizi su limiti contenenti funzioni integrali

Considerata una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo $[a;b]$, con $a \leq b$, continua, esiste l'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$. Sussiste la seguente

Definizione - Si chiama **funzione integrale della funzione f di punto iniziale a** la seguente

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

con x variabile nell'intervallo $[a;b]$.

Nella definizione si è precisato “**di punto iniziale a** ” perché si può scegliere come primo estremo di integrazione, cioè come punto fisso, un qualsiasi punto $x_0 \in [a;b]$ e si ottiene comunque una funzione integrale associata alla f ,

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad (2)$$

che differisce però dalla precedente per una costante. Ciò è una diretta conseguenza delle proprietà dell'integrale definito.

Nella definizione (2) il punto x può variare su tutto l'intervallo $[a;b]$.

Sussiste il seguente

Teorema (di Torricelli⁽¹⁾- Barrow⁽²⁾)

La funzione integrale di una funzione continua $f : [a;b] \rightarrow R$, qualunque sia il punto iniziale $x_0 \in [a;b]$, è derivabile in ogni punto x dell'intervallo e la sua derivata prima coincide con la funzione $f(x)$. Dunque

$$F'(x) = \Phi'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a;b].$$

Dimostrazione

Facciamo riferimento alla definizione (2).

Con $x \in [a;b]$ e Δx reale tale che $x + \Delta x$ sia ancora un punto di $[a;b]$, dobbiamo studiare il limite del rapporto incrementale

⁽¹⁾ Torricelli Evangelista (1608-1647)- Fisico e matematico fu allievo di Galileo Galilei.

⁽²⁾ Barrow Isaac (1630-1677) Matematico inglese fu maestro di Newton.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} \quad (3)$$

Osserviamo che

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt; \quad (4)$$

Dalle espressioni (2) e (4) si deduce che

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \quad (5)$$

A questo punto, per il teorema della media integrale applicato all'intervallo $(x; x + \Delta x)^{(3)}$, sappiamo che esiste almeno un punto c appartenente a detto intervallo per il quale si verifica l'uguaglianza

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \cdot \Delta x,$$

quindi possiamo scrivere

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \quad (6)$$

Per quanto concerne il limite residuo facciamo notare che se $\Delta x \rightarrow 0$ allora $x + \Delta x \rightarrow x$, quindi anche il punto $c \rightarrow x$ e poiché per ipotesi la funzione f è continua nell'intervallo $[a; b]$ si deduce che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Il valore $f(x)$ del limite ottenuto evidentemente è un numero reale e poiché rappresenta anche il limite del rapporto incrementale (3) si conclude che la funzione integrale $\Phi(x)$ è derivabile nel punto x e risulta $\Phi'(x) = f(x)$. C.V.D.

Funzioni ottenute da integrali definiti

Relativamente alla funzione continua $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ vogliamo vedere cosa succede se si considerano integrali del tipo

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \quad (7)$$

dove gli estremi di integrazione $\alpha(x), \beta(x)$ sono funzioni continue a loro volta dipendenti da x che variando rispettivamente in opportuni sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ assumono valori appartenenti all'intervallo $[a; b]$. Evidentemente il risultato dell'integrale (7) sarà variabile e dipende, oltre che dalla struttura della

⁽³⁾ In questo caso per l'intervallo di estremi $x, x + \Delta x$ abbiamo utilizzato il simbolo delle parentesi tonde $(...; ...)$ e non il classico $[...; ...]$ perché dei due punti estremi non si conosce quale sia il maggiore. Quella utilizzata è una convenzione in matematica da sfruttare tutte le volte che si presenta l'indecisione suddetta.

funzione $f(x)$, anche da quelle delle funzioni $\alpha(x), \beta(x)$; dunque l'integrale (7) descrive una nuova funzione della variabile x . Indichiamo con

$$\Gamma(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \quad (8)$$

questa funzione, **che diremo essere stata ottenuta tramite l'operazione di integrazione definita** a partire dalla funzione integranda $f(x)$, con $f:[a;b] \rightarrow R$, continua, con estremi $\alpha(x), \beta(x)$, funzioni continue i cui valori appartengono all'intervallo $[a;b]$.

Si badi che le due funzioni $\alpha(x), \beta(x)$ non necessariamente devono avere come variabile indipendente x ; potrebbe risultare $\alpha(u), \beta(v)$, con u e v variabili nei domini A, B , cioè che risulti

$$\alpha: u \in A \rightarrow [a;b] \text{ e } \beta: v \in B \rightarrow [a;b], \text{ con } A \subseteq R, B \subseteq R; \quad (9)$$

importante è che siano continue e che il loro codominio sia un sottoinsieme dell'intervallo $[a;b]$ di definizione della funzione integranda f .

Non chiameremo $\Gamma(x)$ funzione integrale della funzione f perché vogliamo distinguerla dalle funzioni definite dalle forme (2) e (3) dove un estremo di integrazione è fisso e l'altro è x , le quali hanno la proprietà dichiarata nel precedente teorema. Questa nuova funzione non possiede affatto la suddetta proprietà ed è definita tra l'altro in un dominio opportuno C da determinare caso per caso.

Cosa si può affermare sulla derivabilità della funzione $\Gamma(x)$?

Si risponde a questa domanda facendo ricorso al **teorema sulla derivata di una funzione composta**.

Sia $\Phi(t)$ una qualsiasi primitiva della funzione $f(t)$. Con le ipotesi poste, la funzione $\Gamma(x)$ avrà la seguente forma

$$\Gamma(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt = [\Phi(t)]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = \Phi(\beta(x)) - \Phi(\alpha(x)) \quad (10)$$

Per quanto concerne la derivabilità $\Gamma(x)$, per il teorema sulla derivata di una funzione composta si deve espressamente richiedere che siano derivabili le funzioni interne $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, oltre che la derivabilità della funzione esterna $\Phi(t)$. Il teorema riportato sopra garantisce che è derivabile la funzione $\Phi(t)$, ma nelle ipotesi fatte sulle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ si è precisato che esse possono essere due funzioni continue comunque definite con il solo vincolo che il loro codominio sia un sottoinsieme di $[a;b]$.

Ebbene, se anche le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono derivabili nei rispettivi domini, allora risulterà derivabile la funzione $\Gamma(x)$ e si avrà

$$\Gamma'(x) = \Phi'(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - \Phi'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) \quad (11)$$

Com'è evidente dalla (11), *l'espressione della funzione $\Gamma'(x)$, dove esiste, in generale non coinciderà con quella della funzione integranda di partenza $f(x)$ e ciò spinge a **non denominare $\Gamma(x)$ come "funzione***

integrale della funzione $f(x)$ ", ma semplicemente come una funzione ottenuta dalla f e da altre funzioni (come lo sono $\alpha(x)$ e $\beta(x)$) tramite operazioni integrali.

Gli esempi che seguono chiariranno meglio al lettore questa precisazione.

Esercizi

- 1) Relativamente alla funzione $f(x) = x^2 + x$, considerata nell'intervallo $[1;3]$, determinare la funzione integrale $F(x)$ di punto iniziale $x=1$ e successivamente verificare che la sua derivata prima $F'(x)$ coincide con $f(x)$.

Soluzione

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t^2 + t) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

Calcoliamo ora la derivata prima della funzione integrale.

$$F'(x) = D\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x - 0 = x^2 + x$$

- 2) Considerata la funzione $f(x) = \sqrt{1-2x}$, nell'intervallo $[-3;-1]$, scrivere la funzione integrale di punto iniziale $x=-2$ e successivamente calcolarne la derivata prima.

Soluzione

$$F(x) = \int_{-2}^x \sqrt{1-2t} dt = -\frac{1}{2} \int_{-2}^x -2(1-2t)^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(1-2t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{-2}^x = -\frac{1}{3} \left[(1-2t)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^x =$$

$$-\frac{1}{3} (1-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

Calcolo della derivata prima

$$F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (1-2x)^{\frac{3}{2}-1} \cdot (-2) = (1-2x)^{\frac{1}{2}}$$

- 3) Per la funzione $f(x) = xe^{3-x}$, relativamente all'intervallo $[0;3]$ determinare la funzione integrale di punto iniziale $x=1$ e successivamente determinare la sua derivata prima.

Soluzione

$$F(x) = \int_1^x te^{3-t} dt$$

Eseguiamo il calcolo dell'integrale indefinito, che si affronta con il metodo di integrazione per parti.

$$\int t e^{3-t} dt = \int t \cdot D(-e^{3-t}) dt = -te^{3-t} + \int 1 \cdot e^{3-t} dt = -te^{3-t} - e^{3-t} + c$$

Il valore dell'integrale definito è

$$\int_1^x t e^{3-t} dt = [-te^{3-t} - e^{3-t}]_1^x = -e^{3-x}(x+1) + 2e^2,$$

dunque la funzione integrale richiesta è $F(x) = -e^{3-x}(x+1) + 2e^2$.

Calcolo della derivata prima

$$F'(x) = -e^{3-x}(-1)(x+1) - e^{3-x} = e^{3-x}(x+1-1) = xe^{3-x}$$

- 4) Sia $f(x) = x \ln(x)$, relativamente all'intervallo $[1;e]$ determinare l'espressione della funzione $\Gamma(x)$ definita da

$$\Gamma(x) = \int_1^{\frac{x}{2}} f(t) dt$$

e successivamente calcolare la sua derivata prima.

Soluzione

Osserviamo che la variabile x presente nell'estremo di integrazione deve verificare la doppia condizione $1 \leq \frac{x}{2} \leq e$, quindi $2 \leq x \leq 2e$, affinché l'estremo $x/2$ appartenga all'intervallo $[1;e]$.

$$\Gamma(x) = \int_1^{\frac{x}{2}} f(t) dt = \int_1^{\frac{x}{2}} t \cdot \ln(t) dt$$

Occupiamoci prima dell'integrale indefinito, che si calcola per parti.

$$\begin{aligned} \int t \cdot \ln(t) dt &= \int D\left(\frac{t^2}{2}\right) \cdot \ln(t) dt = \\ \frac{t^2}{2} \cdot \ln(t) - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt &= \frac{t^2}{2} \cdot \ln(t) - \frac{1}{2} \int t dt = \\ \frac{t^2}{2} \cdot \ln(t) - \frac{t^2}{4} + c \end{aligned}$$

Eseguiamo ora l'integrale definito

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{x}{2}} t \cdot \ln(t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \cdot \ln(t) - \frac{t^2}{4} \right]_1^{\frac{x}{2}} = \\ \frac{x^2}{8} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dunque la funzione richiesta è

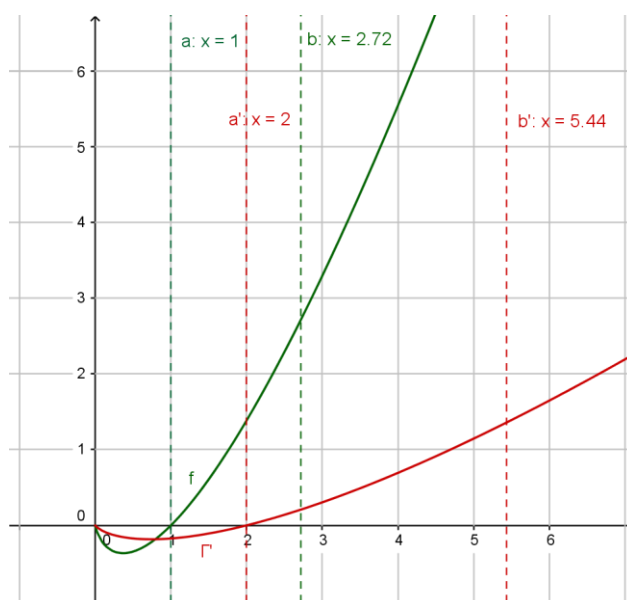


Figura 1- Si osservi come siano diversi i grafici delle due funzioni $f(x) = x \ln(x)$ e $\Gamma'(x) = x/4 \ln(x/2)$, rispettivamente nei colori verde e rosso.

$$\Gamma(x) = \frac{x^2}{8} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4}$$

Calcolo della funzione derivata prima

Con $2 \leq x \leq 2e$ risulta

$$\Gamma'(x) = \frac{2x}{8} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x}{16} = \frac{x}{4} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{8} - \frac{x}{8} = \frac{x}{4} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Si osservi che $\Gamma'(x) \neq f(x)$ (osservare i loro diagrammi riportati in Figura 1).

- 5) Considerata la funzione $f(x) = x^2(2-x)$, relativamente all'intervallo $[0;2]$, determinare l'espressione della funzione $\Gamma(x)$ definita da

$$\Gamma(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} f(t) dt$$

Determinare successivamente l'espressione della funzione derivata prima $\Gamma'(x)$.

Soluzione

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int f(t) dt = \int (2t^2 - t^3) dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^4}{4} + c$$

Espressione della funzione $\Gamma(x)$

Prima di effettuare il calcolo di $\Gamma(x)$ facciamo notare che per assicurare l'appartenenza all'intervallo $[0;2]$ dei valori delle funzioni $\sqrt{x}$ e $2x$ la variabile x deve variare per la prima nell'intervallo $A=[0;4]$, e per la seconda nell'intervallo $B=[0;1]$. E' bene altresì notare che

$$2x \geq \sqrt{x} \text{ se } \begin{cases} 4x^2 - x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ quindi se } (x=0) \vee \left(x \geq \frac{1}{4}\right);$$

pertanto con x variabile in A e in B esistono punti per i quali risulta $2x < \sqrt{x}$. Ciò premesso scriviamo l'espressione della funzione $\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x) = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^4}{4} \right]_{\sqrt{x}}^{2x} = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{4} + \frac{16}{3}x^3 - 4x^4$$

Calcolo della funzione derivata prima $\Gamma'(x)$.

$$\Gamma'(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2x}{4} + \frac{16}{3} \cdot 3x^2 - 4 \cdot 4x^3 = -\sqrt{x} + \frac{x}{2} + 16x^2 - 16x^3$$

Si osservi che la funzione $\Gamma'(x)$ è del tutto diversa dalla funzione $f(x) = x^2(2-x)$.

Studio di limiti

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{2-x} te^{3-t} dt}{e^{x^2-1} - 1}$$

Elaborazioni

Il limite si presenta nella forma 0/0. Spieghiamo perché.

La funzione al numeratore, tendendo presente l'integrale indefinito

$\int te^{3-t} dt = -e^{3-t}(t+1) + c$, è $h(x) = -e^{1+x}(3-x) + 2e^2$, è derivabile, quindi anche continua, e risulta $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$.

Il limite del denominatore è ovviamente 0.

Le due funzioni, $h(x)$ e $k(x) = e^{x^2-1} - 1$ in un intorno del punto $x=1$ sono definite e derivabili; per lo studio del limite in esame possiamo ricorrere alla regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{2-x} te^{3-t} dt}{e^{x^2-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^{1+x}(3-x) + 2e^2}{e^{x^2-1} - 1} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^{1+x}(3-x) + e^{1+x}}{e^{x^2-1} \cdot 2x} = -\frac{e^2}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_1^{x^2-3} \cos(t) dt}{\ln(3x-5)} \quad \text{Il limite si presenta nella forma 0/0.}$$

Elaborazioni

Applichiamo la regola di de l'Hôpital e per questo ricordiamo che $\sin(t)$ è una primitiva di $\cos(t)$ e che risulta

$$\int_1^{x^2-3} \cos(t) dt = \sin(x^2-3) - \sin(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_1^{x^2-3} \cos(t) dt}{\ln(3x-5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-3) - \sin(1)}{\ln(3x-5)} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x^2-3) \cdot 2x}{\frac{3}{3x-5}} = \frac{4}{3} \cos(1)$$

3) Di una funzione $f(x)$ è noto che è definita in $\mathbb{R}$, è continua e risulta $f(1)=6$ e $f(4)=2$. Ciò premesso studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_{3x+1}^{x^2+3} f(t) dt}{\int_{3-2x}^{x^2+x-1} f(t) dt}$$

Elaborazioni

Osserviamo che gli estremi di integrazione dei due integrali presenti nella frazione sono funzioni polinomiali, dunque continue; quelli dell'integrale al numeratore tendono entrambi a 4, quelli dell'integrale al denominatore tendono entrambi ad 1. Il limite si riduce alla forma

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_4^4 f(t) dt}{\int_1^1 f(t) dt}.$$

Poiché la funzione f è continua per ipotesi e quindi integrabile (secondo Riemann) su ogni intervallo limitato, essendo i due intervalli $[4;4]$, $[1;1]$ di misura nulla ciascuno dei due integrali vale zero ⁽⁴⁾ e quindi il limite si presenta della forma 0/0.

Per lo studio del limite si può ricorrere alla regola di de l'Hôpital. Infatti le due funzioni che si ottengono al numeratore e al denominatore calcolando i due integrali sono derivabili, sebbene si tratti di funzioni composte, come vedremo tra breve.

Per applicare la regola di de l'Hôpital, abbiamo bisogno formalmente di disporre delle funzioni cui danno luogo i due integrali. Per questo scopo, sia $\Phi(t)$ una qualsiasi primitiva della funzione $f(t)$, dunque

$$\Phi'(t) = f(t). \quad (3.1)$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\int_{3x+1}^{x^2+3} f(t) dt = \Phi(x^2+3) - \Phi(3x+1) \quad (3.2)$$

$$\int_{3-2x}^{x^2+x-1} f(t) dt = \Phi(x^2+x-1) - \Phi(3-2x) \quad (3.3)$$

Osserviamo che il limite in oggetto diventa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Phi(x^2+3) - \Phi(3x+1)}{\Phi(x^2+x-1) - \Phi(3-2x)} = \frac{\Phi(4) - \Phi(4)}{\Phi(1) - \Phi(1)} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo dunque la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Phi(x^2+3) - \Phi(3x+1)}{\Phi(x^2+x-1) - \Phi(3-2x)} \stackrel{H.}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Phi'(x^2+3) \cdot 2x - \Phi'(3x+1) \cdot 3}{\Phi'(x^2+x-1) \cdot (2x+1) - \Phi'(3-2x) \cdot (-2)} \text{ per la (3.1) si ha}$$

$$\frac{f(4) \cdot 2 - f(4) \cdot 3}{f(1) \cdot (3) - f(1) \cdot (-2)} \stackrel{ipot. f(4)=2, f(1)=6}{=} \frac{2(2-3)}{6(3+2)} = -\frac{1}{15}$$

Conclusione – Il limite in esame esiste e vale -1/15.

⁽⁴⁾ Una giustificazione diversa che i due integrali definiti valgono zero si può dare richiamando il teorema della media integrale.

- 4) Di una funzione $f(x)$ è noto che è definita in $\mathbb{R}$, è continua e risulta $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f(\pi) = 1$. Ciò premesso studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-x} f(t) dt}{\int_{\pi}^{2x} f(t) dt}$$

Elaborazioni

Osserviamo che gli estremi di integrazione dei due integrali presenti nella frazione per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ diventano $\frac{\pi}{4}$ quelli dell'integrale al numeratore, π quelli dell'integrale al denominatore. Il limite si riduce alla forma

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt}{\int_{\pi}^{\pi} f(t) dt} = \frac{0}{0}.$$

Si procede come indicato nel precedente esercizio. Sia $\Phi(t)$ una qualsiasi primitiva della funzione $f(t)$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-x} f(t) dt}{\int_{\pi}^{2x} f(t) dt} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Phi(2x) - \Phi(\pi)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Phi(\pi) - \Phi(\pi)} = \frac{0}{0}$$

Per lo studio del limite applichiamo la regola di de l'Hôpital e ricordiamo le ipotesi $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f(\pi) = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\Phi(2x) - \Phi(\pi)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) \cdot (-1) + 0}{\Phi'(2x) \cdot 2 + 0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) \cdot (-1)}{f(2x) \cdot 2} = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (-1)}{f(\pi) \cdot 2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Il limite in esame esiste e vale $-1/4$.

- 5) Considerata la funzione $F(x) = \int_3^x \frac{t+1}{2t^2+7} dt$, studiare il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x)}{x^2 - 3x}$.

Elaborazioni

La funzione $F(x)$ è una primitiva particolare della funzione $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+7}$, precisamente è la funzione integrale di f di punto iniziale $x=3$. La funzione f è definita su tutto l'asse reale e se $\Phi(t)$ è una sua qualsiasi primitiva sussiste l'uguaglianza

$$F(x) = \int_3^x \frac{t+1}{2t^2+7} dt = \Phi(x) - \Phi(3), \text{ essendo } \Phi'(x) = \frac{x+1}{2x^2+7}.$$

Ovviamente la funzione $\Phi(x)$ è continua e dunque il limite in esame si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x)}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\Phi(x) - \Phi(3)}{x^2 - 3x} = \frac{\Phi(3) - \Phi(3)}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

Possiamo studiare il limite applicando la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\Phi(x) - \Phi(3)}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\Phi'(x)}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+1}{2x^2+7}}{2x-3} = \frac{4}{75}$$

Esercizi proposti

Dimostrare che sussistono i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \frac{t}{t^2+3} dt}{x^2 - x} = \frac{1}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^x \sqrt{1+t} dt}{e^x - 1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{9x^2 - \pi^2}{\int_{\frac{\pi}{3}}^x \cos(2t) dt} = -12\pi$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\int_{2-x}^{3x^2} e^t dt}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\frac{10e^3}{\pi}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_{2x-1}^{x^2-1} \cos(t) dt}{e^{x-2} - 1} = 4\cos(3)$$