

15 esercizi sull'applicazione della funzione integrale

Esercizi su funzioni ottenute da integrali definiti

- 1) Relativamente alla funzione $f(x) = x^2 + x$, considerata nell'intervallo $[1;3]$, determinare la funzione integrale $F(x)$ di punto iniziale $x=1$ e successivamente verificare che la sua derivata prima $F'(x)$ coincide con $f(x)$.

Risposta
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

- 2) Considerata la funzione $f(x) = \sqrt{1-2x}$, nell'intervallo $[-3;-1]$, scrivere la funzione integrale di punto iniziale $x=-2$ e successivamente calcolarne la derivata prima.

Risposta
$$F(x) = -\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

- 3) Per la funzione $f(x) = xe^{3-x}$, relativamente all'intervallo $[0;3]$ determinare la funzione integrale di punto iniziale $x=1$ e successivamente determinare la sua derivata prima.

Risposta
$$F(x) = -e^{3-x}(x+1) + 2e^2.$$

- 4) Sia $f(x) = x \ln(x)$, relativamente all'intervallo $[1;e]$ determinare l'espressione della funzione $\Gamma(x)$ definita da

$$\Gamma(x) = \int_1^x f(t) dt$$

Risposta
$$\Gamma(x) = \frac{x^2}{8} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4}$$

- 5) Considerata la funzione $f(x) = x^2(2-x)$, relativamente all'intervallo $[0;2]$, determinare l'espressione della funzione $\Gamma(x)$ definita da

$$\Gamma(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} f(t) dt$$

Risposta
$$\Gamma(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{4} + \frac{16}{3}x^3 - 4x^4$$

Studio di limiti

1)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{2-x} te^{3-t} dt}{e^{x^2-1} - 1}$$

Risposta
$$-\frac{e^2}{2}$$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_1^{x^2-3} \cos(t) dt}{\ln(3x-5)}$ Risposta $\frac{4}{3} \cos(1)$

- 3) Di una funzione $f(x)$ è noto che è definita in $\mathbb{R}$, è continua e risulta $f(1)=6$ e $f(4)=2$. Ciò premesso studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_{3x+1}^{x^2+3} f(t) dt}{\int_{3-2x}^{x^2+x-1} f(t) dt}$$

Risposta $-1/15$.

- 4) Di una funzione $f(x)$ è noto che è definita in $\mathbb{R}$, è continua e risulta $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f(\pi) = 1$. Ciò premesso studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi-x} f(t) dt}{\int_{\pi}^{2x} f(t) dt}$$

Risposta $-\frac{1}{4}$

- 5) Considerata la funzione $F(x) = \int_3^x \frac{t+1}{2t^2+7} dt$, studiare il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x)}{x^2 - 3x}$.

Risposta $\frac{4}{75}$

Altri esercizi proposti

Dimostrare che sussistono i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \frac{t}{t^2+3} dt}{x^2 - x} = \frac{1}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^x \sqrt{1+t} dt}{e^x - 1} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{9x^2 - \pi^2}{\int_{\frac{\pi}{3}}^x \cos(2t) dt} = -12\pi$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\int_{2-x}^{3x^2} e^t dt}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\frac{10e^3}{\pi}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_{2x-1}^{x^2-1} \cos(t) dt}{e^{x-2} - 1} = 4\cos(3)$