

Esercitazione sugli integrali indefiniti

(con note teoriche)

Per ogni esercizio è indicato il livello di difficoltà (Liv_x), con $1 \leq x \leq 5$.

1) $\int x \cdot e^{2x^2+1} dx = \frac{e^{2x^2+1}}{4} + c$ (Liv_1)

2) $\int x \cdot 3^{x^2+2} dx = \frac{3^{x^2+2}}{2 \ln(3)} + c$ (Liv_1)

3) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + c$ (Liv_1)

4) $\int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{1-\sqrt{x}} + c$ (Liv_2)

5) $\int \pi^{\cos x} \cdot \sin x dx = -\frac{\pi^{\cos x}}{\ln(\pi)} + c$ (Liv_2)

6) $\int x^{-2} e^x dx = -e^x + c$ (Liv_2)

7) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + c$ (Liv_1)

8) $\int e^x \cdot \ln(e^x+1) dx = e^x \cdot \ln(e^x+1) - e^x + \ln(e^x+1) + c$ (Liv_3)

Si applica il **metodo di integrazione per parti** ...

9) $\int \frac{e^x-1}{e^x+2} dx$ (Liv_3)

Si procede con la **sostituzione di variabile** $e^x = t$ come nel precedente esercizio.

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+2} dx = \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} dt$$

Si decompone la frazione integranda nella forma (confrontare la **Nota_4** a margine)

$$\frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)} \rightarrow \dots$$

10) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$ ⁽¹⁾ (Liv_2)

... $\sqrt{1+e^{2x}} + c$

Nota_1

Si ricordino gli integrali immediati

$$\int e^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx = e^{\varphi(x)} + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c,$$

$$\int a^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx =$$

$$\frac{a^{\varphi(x)}}{\ln(a)} + c, \text{ con}$$

$$(a > 0) \wedge (a \neq 1)$$

Nota_2

Si ricordi l'integrale immediato.

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c$$

Nota_3

Quando la funzione integranda dipende dalla funzione esponenziale elementare e^x è sempre opportuno procedere innanzitutto al cambio di variabile ponendo $e^x = t$, da cui $x = \ln(t)$ e

$$dx = \frac{1}{t} dt, \text{ quindi procedere}$$

con le successive elaborazioni.

Nota_4

Si ricordi che per l'integrale

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \text{ con } a \neq 0,$$

se risulta $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, dette x_1, x_2 le radici reali dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ risulta}$$

$$ax^2 + bx + c =$$

$$a(x-x_1)(x-x_2), \text{ quindi}$$

⁽¹⁾ Confrontare la **Nota_3** a margine della pagina

11) $\int \frac{x^3 - 21}{x - 3} dx = {}^{(2)} \dots$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + 6 \cdot \ln|x - 3| + c$$

12) $\int \frac{19x + 3}{x^2 + x + 3} dx$ (Liv_4)

Il trinomio al denominatore ha il discriminante negativo.

Tenendo conto della **Nota_6** riportata a margine, si determinano le due

costanti k e h ivi indicate. $\dots k = \frac{19}{2}, k + h = 3 \rightarrow h = -\frac{13}{2}$

A questo punto l'integrale in esame si scompone come segue

$$\int \frac{19x + 3}{x^2 + x + 3} dx = \dots = \frac{19}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 3) + -\frac{13}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 3} =$$

L'integrale residuo si può calcolare in diversi modi, qui utilizziamo il **metodo di sostituzione** ponendo **la derivata del denominatore uguale a t** ...

In definitiva l'integrale indefinito in esame vale

$$\int \frac{19x + 3}{x^2 + x + 3} dx = \frac{19}{2} \cdot \ln(x^2 + x + 3) - \frac{13}{\sqrt{11}} \arctg\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{11}}\right) + c$$

13) $\int \frac{5x + 19}{x^2 + 12x + 36} dx$ (Liv_3)

Il trinomio al denominatore è il quadrato di un binomio:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2, \text{ quindi il suo discriminante è nullo: } \Delta = 0. \text{ Si deve}$$

procedere alla trasformazione della frazione integranda come indicato nella **Nota_6**.

$$\dots 5 \ln|x + 6| + \frac{11}{x + 6} + c$$

14) $I = \int \frac{4x^3 + 7x}{2x^2 + x + 1} dx$ (Liv_4)

Per studiare questo integrale è necessario innanzitutto eseguire la divisione tra numeratore e denominatore per decomporre la frazione integranda nella somma di un polinomio intero con una frazione avente come numeratore un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore.

...

$$\frac{4x^3 + 7x}{2x^2 + x + 1} = 2x - 1 + \frac{6x + 1}{2x^2 + x + 1}, \text{ da cui}$$

$$I = \int \frac{4x^3 + 7x}{2x^2 + x + 1} dx = \dots = \frac{x^2 - x}{2} + I_1$$

L'integrale residuo è del tipo di quello studiato nel precedente n.12); seguiamo lo stesso procedimento senza ulteriori descrizioni.

...

In conclusione l'integrale in esame vale

$$I = \frac{x^2 - x}{2} + \frac{3}{2} \ln(2x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctg\left(\frac{4x + 1}{\sqrt{7}}\right) + c$$

Nota_5

Si ricordi che l'integrale

$$\int \frac{P_n(x)}{ax + b} dx, \text{ con } P_n(x)$$

polinomio di grado $n \geq 1$,

dopo aver eseguito la

divisione $P_n(x) : (ax + b)$,

detti $Q(x)$ e R il quoziente

ed il resto ottenuti, si riduce

alla seguente somma

$$\int Q(x) dx + \int \frac{R}{ax + b} dx$$

Nota_6

Si ricordi che per l'integrale

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx, \text{ con } a \neq 0,$$

se risulta $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ o

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

innanzitutto si deve

trasformare la frazione

integranda per ricondurla

alla forma seguente

$$\frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} =$$

$$\frac{k \cdot D(ax^2 + bx + c) + h}{ax^2 + bx + c} =$$

$$\frac{k \cdot (2ax + b) + h}{ax^2 + bx + c} = \dots$$

⁽²⁾ Confrontare la **Nota_5** a margine della pagina