

Esercitazione sugli integrali indefiniti

(con note teoriche)

Per ogni esercizio è indicato il livello di difficoltà (Liv_x), con $1 \leq x \leq 5$.

$$1) \int x \cdot e^{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} \cdot \int 4x \cdot e^{2x^2+1} dx = \frac{e^{2x^2+1}}{4} + c \quad (\text{Liv}_1)$$

$$2) \int x \cdot 3^{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot 3^{x^2+2} dx = \frac{3^{x^2+2}}{2 \ln(3)} + c \quad (\text{Liv}_1)$$

$$3) \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + c \quad (\text{Liv}_1)$$

$$4) \int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cdot \int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{-2\sqrt{x}} dx = -2e^{1-\sqrt{x}} + c \quad (\text{Liv}_2)$$

$$5) \int \pi^{\cos x} \cdot \sin x dx = -\int \pi^{\cos x} \cdot (-\sin x) dx = -\frac{\pi^{\cos x}}{\ln(\pi)} + c \quad (\text{Liv}_2)$$

$$6) \int x^{-2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int e^{\frac{1}{x}} \cdot D\left(\frac{1}{x}\right) dx = -e^{\frac{1}{x}} + c \quad (\text{Liv}_2)$$

$$7) \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + c \quad (\text{Liv}_1)$$

$$8) \int e^x \cdot \ln(e^x+1) dx \quad (\text{Liv}_3)$$

Si applica il **metodo di integrazione per parti** considerando e^x come fattore differenziale.

$$\int e^x \cdot \ln(e^x+1) dx = e^x \cdot \ln(e^x+1) - \int \frac{e^x}{e^x+1} \cdot e^x dx, \text{ l'integrale residuo si studia}$$

con il **cambio di variabile** ponendo $e^x = t \rightarrow x = \ln(t) \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$.

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} \cdot e^x dx = \int \frac{t^2}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \stackrel{(1)}{=} t - \ln(t+1) + c = e^x - \ln(e^x+1) + c.$$

In conclusione si ha

$$\int e^x \cdot \ln(e^x+1) dx = e^x \cdot \ln(e^x+1) - e^x + \ln(e^x+1) + c$$

$$9) \int \frac{e^x-1}{e^x+2} dx \quad (\text{Liv}_3)$$

Si procede con la **sostituzione di variabile** $e^x = t$ come nel precedente esercizio.

$$\int \frac{e^x-1}{e^x+2} dx = \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} dt \quad \text{Si decompone la frazione integranda nella forma (confrontare la Nota_4 a margine)}$$

$$\frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)} \rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}; \text{ quindi}$$

Nota_1

Si ricordino gli integrali immediati

$$\int e^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx = e^{\varphi(x)} + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c,$$

$$\int a^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx =$$

$$\frac{a^{\varphi(x)}}{\ln(a)} + c, \text{ con}$$

$$(a > 0) \wedge (a \neq 1)$$

Nota_2

Si ricordi l'integrale immediato

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c$$

Nota_3

Quando la funzione integranda dipende dalla funzione esponenziale elementare e^x è sempre opportuno procedere innanzitutto al cambio di variabile ponendo $e^x = t$, da cui $x = \ln(t)$ e

$$dx = \frac{1}{t} dt, \text{ quindi procedere}$$

con le successive elaborazioni.

Nota_4

Si ricordi che per l'integrale

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \text{ con } a \neq 0,$$

se risulta $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, dette x_1, x_2 le radici reali dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ risulta}$$

$$ax^2 + bx + c =$$

$$a(x-x_1)(x-x_2), \text{ quindi}$$

⁽¹⁾ Si osservi che $t=e^x > 0 \Rightarrow t+1 > 0$ e per questo motivo l'argomento della successiva funzione logaritmica è stato scritto senza segno di modulo.

$$\int \frac{t-1}{t(t+2)} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \frac{3}{2} \int \frac{1}{t+2} dt = -\frac{1}{2} \ln(t) + \frac{3}{2} \ln(t+2) + c \rightarrow$$

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 2} dx = -\frac{1}{2} \ln(e^x) + \frac{3}{2} \ln(e^x + 2) + c = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln(e^x + 2) + c$$

10) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$ ⁽²⁾ (Liv_2)

Con $e^x = t \rightarrow \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} dt =$

$$\frac{1}{2} \int 2t(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot 2(1+t^2)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+e^{2x}} + c$$

11) $\int \frac{x^3 - 21}{x-3} dx$ ⁽³⁾ Eseguendo la divisione tra il polinomio al numeratore e il polinomio al denominatore si trasforma l'integrale come segue

$$\int \left(x^2 + 3x + 9 + \frac{6}{x-3} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + 6 \cdot \ln|x-3| + c$$

12) $\int \frac{19x+3}{x^2+x+3} dx$ (Liv_4)

Il trinomio al denominatore ha il discriminante negativo.

Tenendo conto della **Nota_6** riportata a margine, si determinano le due costanti **k** e **h** ivi indicate. Si ha:

$$\frac{19x+3}{x^2+x+3} = \frac{k \cdot D(x^2+x+3)+h}{x^2+x+3} = \frac{k \cdot (2x+1)+h}{x^2+x+3} = \frac{2kx+k+h}{x^2+x+3} \rightarrow k = \frac{19}{2},$$

$$k+h=3 \rightarrow h = -\frac{13}{2}$$

A questo punto l'integrale in esame si decompone come segue

$$\int \frac{19x+3}{x^2+x+3} dx = \frac{19}{2} \cdot \int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx - \frac{13}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+3} dx = \frac{19}{2} \cdot \ln(x^2+x+3) +$$

$$-\frac{13}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+3} =$$

L'integrale residuo si può calcolare in diversi modi, qui utilizziamo il **metodo di sostituzione** ponendo la **derivata del denominatore uguale a t** tramite la quale si riesce a ricondurre il denominatore alla somma di due quadrati.

$$2x+1=t \rightarrow x = \frac{t-1}{2} \rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$-\frac{13}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+3} = -\frac{13}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \frac{t-1}{2} + 3} \cdot \frac{1}{2} dt = -\frac{13}{4} \int \frac{1}{\frac{t^2-2t+1}{4} + \frac{t-1}{2} + 3} dt =$$

$$-13 \int \frac{dt}{t^2+11} = -\frac{13}{11} \int \frac{dt}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2} = -\frac{13}{\sqrt{11}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{11}} dt}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2} = -\frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right) + c =$$

$$-\frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + c$$

⁽²⁾ Confrontare la **Nota_3** a margine della pagina

⁽³⁾ Confrontare la **Nota_5** a margine della pagina

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} dx \text{ e si}$$

determinano le due costanti reali A_1, A_2 , tali che si abbia

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} =$$

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}. \text{ Le costanti si}$$

determinano applicando opportunamente il **principio di identità dei polinomi**,

Nota_5

Si ricordi che l'integrale

$$\int \frac{P_n(x)}{ax+b} dx, \text{ con } P_n(x)$$

polinomio di grado $n \geq 1$,

dopo aver eseguito la

divisione $P_n(x):(ax+b)$,

detti $Q(x)$ e R il quoziente

ed il resto ottenuti, si riduce alla seguente somma

$$\int Q(x) dx + \int \frac{R}{ax+b} dx$$

Nota_6

Si ricordi che per l'integrale

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \text{ con } a \neq 0,$$

se risulta $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ o

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$

innanzitutto si deve

trasformare la frazione

integranda per ricondurla

alla forma seguente

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{k \cdot D(ax^2+bx+c)+h}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{k \cdot (2ax+b)+h}{ax^2+bx+c} =$$

$$\frac{2akx+kb+h}{ax^2+bx+c} \text{ e risulta}$$

$$k = \frac{m}{2a}, h = n - \frac{mb}{2a}.$$

In definitiva l'integrale indefinito in esame vale

$$\int \frac{19x+3}{x^2+x+3} dx = \frac{19}{2} \cdot \ln(x^2+x+3) - \frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + c$$

13) $\int \frac{5x+19}{x^2+12x+36} dx$ (Liv_3)

Il trinomio al denominatore è il quadrato di un binomio:

$x^2+12x+36=(x+6)^2$, quindi il suo discriminante è nullo: $\Delta=0$. Si deve

procedere alla trasformazione della frazione integranda come indicato nella

Nota_6.

$$= \frac{k(2x+12)+h}{x^2+12x+36} = \frac{2kx+12k+h}{x^2+12x+36} \rightarrow k = \frac{5}{2}, 12k+h=19 \rightarrow h=19-12 \cdot \frac{5}{2} = -11$$

Calcolo dell'integrale indefinito.

$$\int \frac{5x+19}{x^2+12x+36} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+12}{x^2+12x+36} dx - 11 \int \frac{dx}{(x+6)^2} = \frac{5}{2} \int \frac{2(x+6)}{(x+6)^2} dx -$$

$$11 \int (x+6)^{-2} dx = 5 \ln|x+6| + \frac{11}{x+6} + c$$

14) $I = \int \frac{4x^3+7x}{2x^2+x+1} dx$ (Liv_4)

Per studiare questo integrale è necessario innanzitutto eseguire la divisione tra numeratore e denominatore per decomporre la frazione integranda nella somma di un polinomio intero con una frazione avente come numeratore un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore.

La divisione $(4x^3+7x):(2x^2+x+1)$ fornisce come quoziente $Q(x)=2x-1$ e

come resto $R(x)=6x+1$; la frazione si scrive nella forma seguente

$$\frac{4x^3+7x}{2x^2+x+1} = 2x-1 + \frac{6x+1}{2x^2+x+1}, \text{ da cui}$$

$$I = \int \frac{4x^3+7x}{2x^2+x+1} dx = \int (2x-1) dx + \int \frac{6x+1}{2x^2+x+1} dx = \frac{x^2-x}{2} + I_1$$

L'integrale residuo è del tipo di quello studiato nel precedente n.12);

seguiamo lo stesso procedimento senza ulteriori descrizioni.

$$I_1 = \int \frac{6x+1}{2x^2+x+1} dx = \int \frac{k(4x+1)+h}{2x^2+x+1} dx = \int \frac{4kx+k+h}{2x^2+x+1} dx \rightarrow k = \frac{3}{2}, h = -\frac{1}{2};$$

$$I_1 = \frac{3}{2} \int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2} \ln(2x^2+x+1) + I_2$$

Calcolo dell'integrale I_2 per sostituzione con $4x+1=t \rightarrow x = \frac{t-1}{4}$ e $dx = \frac{1}{4} dt$.

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x^2+x+1} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{2\left(\frac{t-1}{4}\right)^2 + \frac{t-1}{4} + 1} \cdot \frac{1}{4} dt =$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{t^2-2t+1}{8} + \frac{t-1}{4} + 1} \cdot \frac{1}{4} dt = -\int \frac{dt}{t^2+7} = -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right) + c = -\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + c$$

In conclusione l'integrale in esame vale

$$I = \frac{x^2-x}{2} + \frac{3}{2} \ln(2x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + c$$