

Esercitazione sugli integrali indefiniti

$$1) \int \frac{2}{x(15+7\ln(x))} dx = \frac{2}{7} \int \frac{\frac{7}{x}}{15+7\ln(x)} dx = \frac{2}{7} \ln|15+7\ln(x)| + c$$

$$2) \int \frac{1}{x(\ln(3x)-1)} dx = \dots = \ln|1-\ln(3x)| + c$$

$$3) \int \frac{1}{x \log_2(4x)} dx = \dots = \ln(2) \cdot \ln|\ln(4x)| + c$$

$$4) \int \left(\sqrt{2x} + \frac{\ln(2x)}{2x} \right) dx = \dots = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (\ln(2x))^2 + c$$

$$5) \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \dots = x + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + c$$

$$6) \int \frac{dx}{9+x^2} = \dots = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{x}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2+17} = \dots = \frac{1}{\sqrt{17}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right) + c$$

$$8) \int \frac{5dx}{3+4x^2} = \dots = \frac{5\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$9) \int \frac{dx}{2+(3x+1)^2} = \dots = \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$10) \int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \dots = \operatorname{arctg}(x+3) + c$$

$$11) \int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \dots = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$12) \int \frac{x^3-4x+1}{x+3} dx = \dots = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 14\ln|x+3| + c$$

$$13) \int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2} dx \quad \text{Effettuiamo la sostituzione di variabile ponendo } \sqrt{x}=t \rightarrow x=t^2, \quad dx=2t dt.$$

$$\text{Otteniamo } \dots \quad 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{2}x + 6\sqrt{x} + 10\ln|\sqrt{x}-2| \right) + c$$

$$14) \quad \int \frac{x+1}{2x^2-x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} dx$$

Si cercano le due costanti A e B tali che si

$$\text{abbia} \quad \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} = \frac{A}{x+\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-1}; \dots$$

$$\text{Risultato: } -\frac{1}{6} \ln \left| x + \frac{1}{2} \right| + \frac{2}{3} \ln|x-1| + c$$

15) $\int \frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)} dx$ Si cercano le tre costanti A, B, C che verificano l'uguaglianza

$$\frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \dots \quad \text{Risultato: } -\frac{1}{2}\ln|x| + 3\ln|x+1| - \frac{5}{2}\ln|x+2| + c$$

16) $\int \frac{x}{(3x-1)(x+2)^2} dx$

Si devono determinare le tre costanti A, B, C che verificano la seguente uguaglianza

$$\frac{x}{(3x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{3x-1} \dots \quad \text{Risultato: } -\frac{1}{49}\ln|x+2| - \frac{2}{7(x+2)} + \frac{1}{49}\ln|3x-1| + c$$

17) $\int \frac{3x-4}{4x^2-4x+1} dx$ Osserviamo che il trinomio al denominatore ha il discriminante nullo.

Trasformiamo opportunamente la frazione in modo da scrivere il numeratore come somma della derivata del denominatore moltiplicata per una costante e di un'ulteriore costante additiva come di seguito indicato:...

$$\text{Risultato: } \frac{3}{4} \cdot \ln|2x-1| + \frac{5}{4(2x-1)} + c$$

18) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx = \dots = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$