

Esercitazione sugli integrali indefiniti

- 1) $\int \frac{2}{x(15+7\ln(x))} dx = \frac{2}{7} \int \frac{\frac{7}{x}}{15+7\ln(x)} dx = \frac{2}{7} \ln|15+7\ln(x)| + c$
- 2) $\int \frac{1}{x(\ln(3x)-1)} dx = \int \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln(3x)} dx = \ln|1-\ln(3x)| + c$
- 3) $\int \frac{1}{x \log_2(4x)} dx = \int \frac{\ln(2)}{x \ln(4x)} dx = \ln(2) \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(4x)} dx = \ln(2) \cdot \ln|\ln(4x)| + c$
- 4) $\int \left(\sqrt{2x} + \frac{\ln(2x)}{2x} \right) dx = \sqrt{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \ln(2x) \cdot D(\ln(2x)) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot (\ln(2x))^2 + c$
- 5) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \left(1 + x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{4}} \right) dx = x + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + c$
- 6) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)} = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$
- 7) $\int \frac{dx}{x^2+17} = \dots = \frac{1}{\sqrt{17}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right) + c$
- 8) $\int \frac{5dx}{3+4x^2} = \frac{5}{3} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dx}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + c$
- 9) $\int \frac{dx}{2+(3x+1)^2} = \int \frac{dx}{2\left(1+\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} dx}{1+\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$
- 10) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{1+(x+3)^2} = \operatorname{arctg}(x+3) + c$
- 11) $\int \frac{dx}{x^2+5x+7} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \dots = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right) + c$
- 12) $\int \frac{x^3-4x+1}{x+3} dx = \int \left(x^2-3x+5+\frac{-14}{x+3} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 14\ln|x+3| + c$
- 13) $\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2} dx$ Effettuiamo la sostituzione di variabile ponendo $\sqrt{x}=t \rightarrow x=t^2, dx=2t dt$.

Otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2} dx = \int \frac{t+t^2}{t-2} \cdot 2t dt = 2 \int \left(t^2 + 3t + 6 + \frac{10}{t-2} \right) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 + 6t + 10 \ln|t-2| \right) + c =$$

$$2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{2}x + 6\sqrt{x} + 10 \ln|\sqrt{x}-2| \right) + c$$

14) $\int \frac{x+1}{2x^2-x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} dx$ Si cercano le due costanti A e B tali che si abbia

$$\frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} = \frac{A}{x+\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-1}; \text{ le due costanti sono } A = -\frac{1}{3}; B = \frac{4}{3}. \text{ Risulta}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{A}{x+\frac{1}{2}} dx + \int \frac{B}{x-1} dx \right) = -\frac{1}{6} \ln \left| x + \frac{1}{2} \right| + \frac{2}{3} \ln|x-1| + c$$

15) $\int \frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)} dx$ Si cercano le tre costanti A, B, C che verificano l'uguaglianza

$$\frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \text{ e si riscontra che sono } A = -\frac{1}{2}, B = 3, C = -\frac{5}{2}. \text{ L'integrale indefinito vale}$$

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)(x+2)} dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + 3 \ln|x+1| - \frac{5}{2} \ln|x+2| + c$$

16) $\int \frac{x}{(3x-1)(x+2)^2} dx$

Si devono determinare le tre costanti A, B, C che verificano la seguente uguaglianza:

$$\frac{x}{(3x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{3x-1}. \text{ Eseguiti i calcoli si ricava: } A = -\frac{1}{49}, B = \frac{2}{7}, C = \frac{3}{49}.$$

Calcolo dell'integrale indefinito.

$$\int \frac{x}{(3x-1)(x+2)^2} dx = -\frac{1}{49} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{2}{7} \int (x+2)^{-2} dx + \frac{1}{49} \int \frac{3}{3x-1} dx = -\frac{1}{49} \ln|x+2| - \frac{2}{7(x+2)} + \frac{1}{49} \ln|3x-1| + c$$

17) $\int \frac{3x-4}{4x^2-4x+1} dx$ Osserviamo che il trinomio al denominatore ha il discriminante nullo.

Trasformiamo opportunamente la frazione in modo da scrivere il numeratore come somma della derivata del denominatore moltiplicata per una costante e di un'ulteriore costante additiva come di seguito indicato:

$\frac{3x-4}{4x^2-4x+1} = \frac{k(8x-4)+h}{4x^2-4x+1} = \frac{8kx-4k+h}{4x^2-4x+1}$, dal confronto dei numeratori delle frazioni prima e terza si deduce che devono sussistere le uguaglianze

$$\begin{cases} 8k=3 \\ -4k+h=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k=\frac{3}{8} \\ h=-4+4\cdot\frac{3}{8}=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Proseguiamo con il calcolo dell'integrale indefinito.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{4x^2-4x+1} dx &= \int \frac{3}{8} \cdot \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} dx + \int -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4x^2-4x+1} dx = \frac{3}{8} \cdot \ln|4x^2-4x+1| - \frac{5}{2} \int (2x-1)^{-2} dx = \\ &= \frac{3}{8} \cdot \ln|(2x-1)^2| - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2(2x-1)^{-2} dx = \frac{3}{4} \cdot \ln|2x-1| + \frac{5}{4(2x-1)} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18) \quad \int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot (1-\cos^2 x) \sin x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin x dx - \int \cos^4 x \cdot \sin x dx = \\ &= -\int \cos^2 x \cdot D(\cos x) dx + \int \cos^4 x \cdot D(\cos x) dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c \end{aligned}$$