

Studio di integrali generalizzati

- 1) $\int_0^1 x \ln(x) dx$ La funzione integranda è definita nell'intervallo aperto $]0;+\infty[$, perciò per l'integrale in esame si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \ln(x) dx.$$

Occupiamoci dell'integrale indefinito associato che va studiato applicando il metodo di integrazione per parti.

$$\begin{aligned} \int x \ln(x) dx &= \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

Studio del limite

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \ln(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} \right]_{\varepsilon}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(1) - \frac{1}{4} \right] - \left[\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \ln(\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{4} \right] = 0 - \frac{1}{4} - [0 - 0] = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nel calcolo del limite si è tenuto conto del limite notevole $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^r \cdot \ln(\varepsilon) = 0$, valido per ogni $r > 0$.

Concludiamo che l'integrale generalizzato è convergente il suo valore è $-1/4$.

- 2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ La funzione integranda è definita nell'intervallo aperto $]0;+\infty[$, quindi per l'integrale in esame si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}) = 2$$

Concludiamo che l'integrale è convergente.

In Figura 2 è riportato il diagramma della funzione e indicato il valore approssimato dell'integrale definito della stessa relativo all'intervallo $[10^{-4}; 1]$.

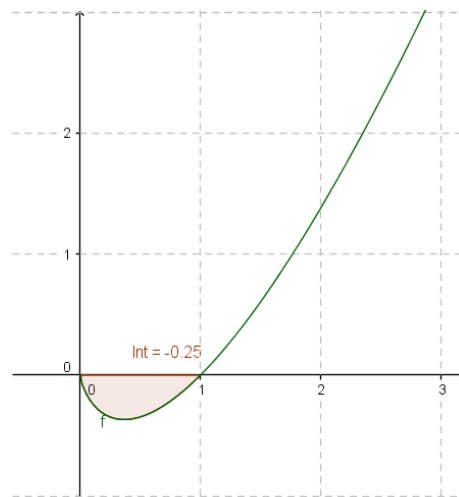


Figura 1

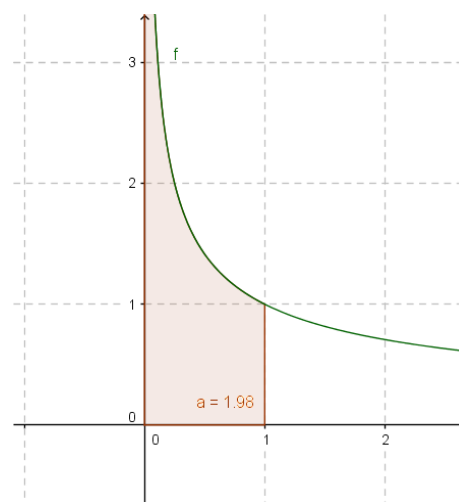


Figura 2

- 3) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$ La funzione integranda è definita nell'intervallo aperto $] -\infty; 2 [$, quindi per l'integrale in esame si deve studiare il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$$

Calcolo dell'integrale definito

$$\begin{aligned} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx &= - \int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{2}} dx = - \left[2(2-x)^{\frac{1}{2}} \right]_0^{2-\varepsilon} = \\ &= -2 \left[(2-2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \right] = -2 \left[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{2} \right] \end{aligned}$$

Studio del limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -2 \left[\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{2} \right] = 2\sqrt{2}$$

Concludiamo che l'integrale generalizzato converge.

In Figura 3 è rappresentato il diagramma della funzione con indicazione del valore approssimato

dell'integrale definito $\int_0^{1,9999} \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$.

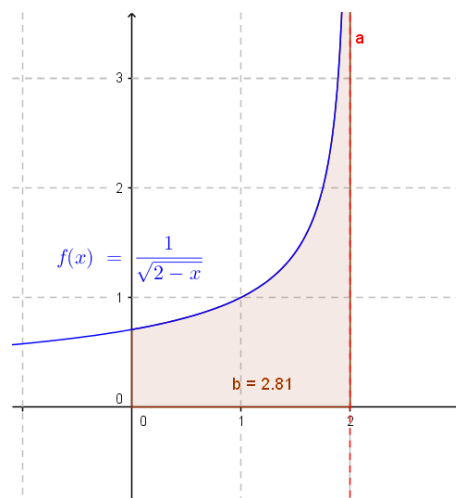


Figura 3

- 4) $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ La funzione integranda è definita in $\mathbb{R} - \{1\}$; si deve studiare il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x-1} dx$.
Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln|x-1| \right]_{1+\varepsilon}^2 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln(1) - \ln(\varepsilon)] = [0 - (-\infty)] = +\infty \end{aligned}$$

L'integrale diverge positivamente e quindi la funzione integranda non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $]1; 2]$.

In Figura 4 è rappresentato il diagramma della funzione con indicazione del valore approssimato dell'integrale

definito $\int_{1,0001}^2 \frac{1}{x-1} dx$.

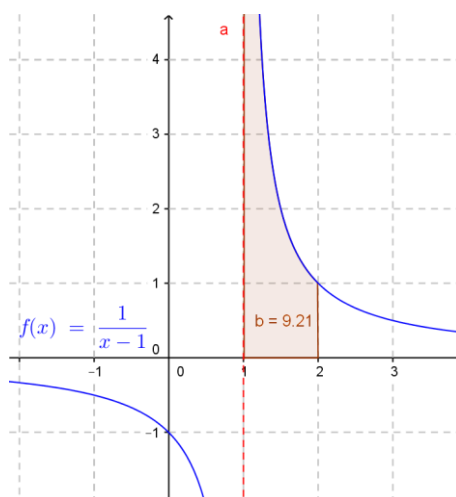


Figura 4

- 5) $\int_0^1 \frac{x^3}{1-x^2} dx$ La funzione integranda è definita in

$\mathbb{R} - \{-1; 1\}$; si deve studiare il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^3}{1-x^2} dx$.

Studio dell'integrale indefinito.

$\int \frac{x^3}{1-x^2} dx$ Si deve decomporre la frazione integranda eseguendo la divisione $x^3:(1-x^2)$. Risulta

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}, \text{ quindi}$$

$$\int \frac{x^3}{1-x^2} dx = \int \left(-x + \frac{x}{1-x^2} \right) dx =$$

$$\int -x dx + \left(-\frac{1}{2} \right) \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + c$$

Studio del limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^3}{1-x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|1-x^2| \right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|1-(1-\varepsilon)^2| \right] - \left(0 - \frac{1}{2} \ln(1) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|2\varepsilon - \varepsilon^2| \right] =$$

$$\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(0^+) \right] = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-\infty) = +\infty$$

L'integrale diverge positivamente, quindi la funzione in oggetto non è integrabile in senso generalizzato. In Figura 5 è riportato il diagramma della funzione con indicazione del valore

approssimato dell'integrale definito $\int_0^{0,9999} \frac{x^3}{1-x^2} dx \approx 3,76$.

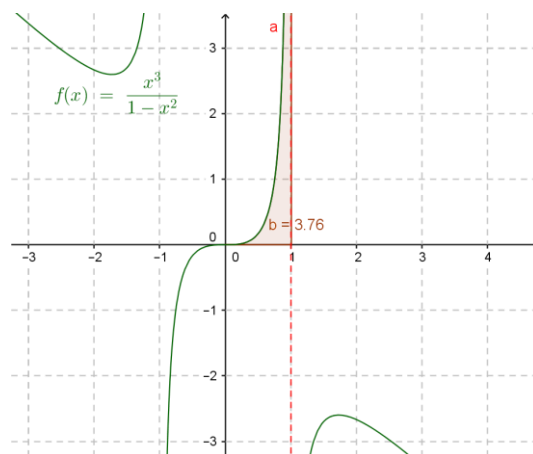


Figura 5

- 6) $\int_0^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 4} dx$ La funzione integranda è definita in $R - \{-2; 2\}$; si deve studiare il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 4} dx$$

Studio dell'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 4} dx$$

La funzione integranda si può decomporre nel modo seguente

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 4} = x + 2 + \frac{4x + 7}{x^2 - 4}$$

La frazione residua si può decomporre ulteriormente come segue $\frac{4x+7}{x^2-4} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-2}$ e le costanti

A_1, A_2 si determinano utilizzando il principio di identità dei polinomi. Eseguendo le elaborazioni

necessarie si riscontra che $A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = \frac{15}{4}$. In definitiva per l'integrale indefinito si ha

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 4} dx = \int (x + 2) dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x + 2} dx +$$

$$\frac{15}{4} \int \frac{1}{x - 2} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + \frac{15}{4} \ln|x - 2| + c$$

Studio del limite dell'integrale definito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 4} dx =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + \frac{15}{4} \ln|x - 2| \right]_0^{2-\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(2-\varepsilon)^2}{2} + 2(2-\varepsilon) + \frac{1}{4} \ln|4-\varepsilon| + \frac{15}{4} \ln|-\varepsilon| \right] -$$

$$\left[0 + 0 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{15}{4} \ln 2 \right] =$$

$$2 + 4 + \frac{1}{4} \ln 4 + \frac{15}{4} \ln(0^+) - 4 \ln 2 = 6 - \frac{7}{2} \ln 2 + \frac{15}{4} \cdot (-\infty) = -\infty$$

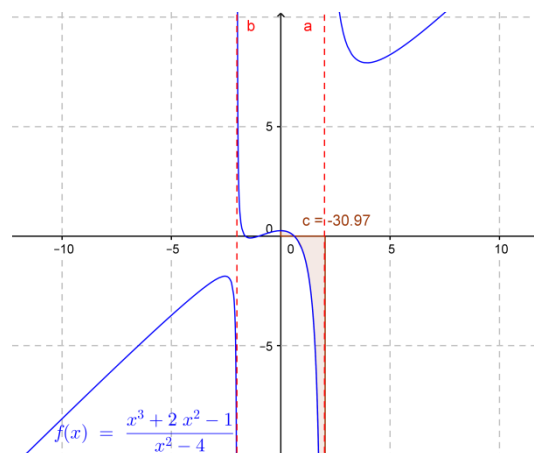


Figura 6

L'integrale in oggetto diverge negativamente, dunque la funzione integranda non è integrabile in senso generalizzato.

Il diagramma della funzione è rappresentato in Figura 6 ed è indicato il valore approssimato dell'integrale relativamente all'intervallo $[0; 1,9999]$.

- 7) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ La funzione integranda è definita nell'intervallo $]1; +\infty[$; si deve studiare il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_2^k \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$$

Occupiamoci dell'integrale indefinito $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ che

va studiato con il metodo di sostituzione. Poniamo

$\sqrt{x-1} = t$, da cui $x = t^2 + 1$ e $dx = 2t dt$. Si ha

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{2t dt}{(t^2 + 1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \arctg(t) + c =$$

$$2 \arctg(\sqrt{x-1}) + c$$

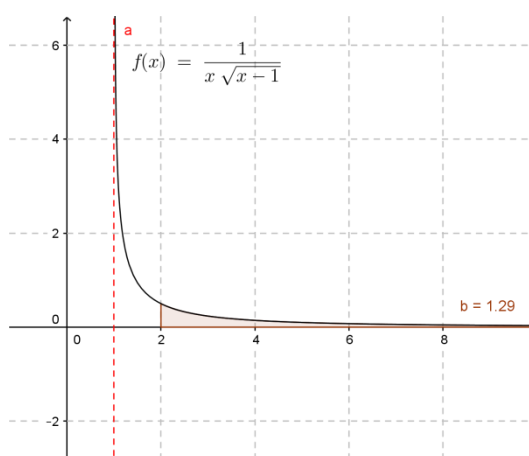


Figura 7

Studio del limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_2^k \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[2 \arctg(\sqrt{x-1}) \right]_2^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \left[\arctg(\sqrt{k-1}) - \arctg(1) \right] = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

L'integrale è convergente e quindi la funzione in esame è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[2; +\infty[$.

Il diagramma della funzione è rappresentato in Figura 7 ed è indicato il valore approssimato dell'integrale relativamente all'intervallo $[2;50]$.