

Studio degli integrali

$$1) \int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad 2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad 3) \int \sqrt{p^2 + (mx + n)^2} dx$$

*** **

1) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$

Effettuiamo la sostituzione $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$, ... si ricava

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t} \dots, dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

per cui l'integrale indefinito assume la forma seguente

$$\dots = \frac{1}{4} \int (t + 2t^{-1} + t^{-3}) dt = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{t^2}{2} + 2 \log|t| - \frac{1}{2t^2} \right] + c$$

Tornando alla variabile x , essendo $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$, si ottiene la forma

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \dots = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2 + \frac{1}{2} \cdot \log|\sqrt{x^2 + 1} + x| - \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2} + C$$

Nell'espressione ottenuta si può eliminare il segno di valore assoluto nell'argomento del logaritmo perché in tutto $\mathbb{R}$ risulta soddisfatta la disuguaglianza stretta

$$\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

Osserviamo che l'integrale studiato si può anche affrontare con la sostituzione

$$\sqrt{x^2 + 1} = t + x$$

...; si perviene al seguente risultato

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \log(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2} + C$$

Le due forme ottenute per l'insieme delle primitive sono solo apparentemente diverse. Di seguito, ponendo

$$F_1(x) = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2 + \frac{1}{2} \cdot \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2},$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \log(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2}$$

si elaborano le due espressioni e si dimostra che possono essere ricondotte alla stessa forma.

Elaborazioni delle due forme

Prima forma

...

Seconda forma

...

*** **

$$2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

$$3) \int \sqrt{p^2 + (mx + n)^2} dx$$

Per lo studio degli integrali (2) e (3) si sfrutta il lavoro sviluppato per lo studio dell'integrale (1).

...

...