

Studio degli integrali

$$1) \int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad 2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad 3) \int \sqrt{p^2 + (mx + n)^2} dx$$

*** **

1) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$

Effettuiamo la sostituzione $\sqrt{x^2 + 1} = t - x$, elevando al quadrato e semplificando si ricava

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t} \dots, \dots, \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t} \dots, \dots, dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

per cui l'integrale indefinito assume la forma seguente

$$\int \frac{t^2 + 1}{2t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \int (t + 2t^{-1} + t^{-3}) dt = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{t^2}{2} + 2 \log|t| - \frac{1}{2t^2} \right] + c$$

Tornando alla variabile x , essendo $t = \sqrt{x^2 + 1} + x$, si ottiene la forma

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{t^2}{2} + 2 \log|t| - \frac{1}{2t^2} \right] + C = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2 + \frac{1}{2} \cdot \log|\sqrt{x^2 + 1} + x| - \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2} + C$$

Nell'espressione ottenuta si può eliminare il segno di valore assoluto nell'argomento del logaritmo perché in tutto $\mathbb{R}$ risulta soddisfatta la disuguaglianza stretta

$$\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

Osserviamo che l'integrale studiato si può anche affrontare con la sostituzione

$$\sqrt{x^2 + 1} = t - x$$

e procedendo con calcoli analoghi; si perviene al seguente risultato

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \log(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2} + C$$

Le due forme ottenute per l'insieme delle primitive sono solo apparentemente diverse. Di seguito, ponendo

$$F_1(x) = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2 + \frac{1}{2} \cdot \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2},$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \log(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2}$$

si elaborano le due espressioni e si dimostra che possono essere ricondotte alla stessa forma.

Elaborazioni delle due forme

Prima forma

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2 - \frac{1}{8 \cdot \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2 - \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2 \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2} \right] + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \frac{1}{8} \left[\left(\sqrt{x^2+1} + x \right) + \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \right] \cdot \\ &= \left[\left(\sqrt{x^2+1} + x \right) - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \right] + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) \end{aligned}$$

Seconda forma

$$\begin{aligned} F_2(x) &= -\frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 + \frac{1}{8 \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2} - \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2} - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2} - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left\{ \left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x \right)}{\left(\sqrt{x^2+1} \right)^2 - (x)^2} \right]^2 - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left\{ \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x^2+1-x^2} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left[\left(\sqrt{x^2+1} + x \right) + \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \right] \cdot \\ &= \left[\left(\sqrt{x^2+1} + x \right) - \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \right] + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \frac{1}{2} \cdot x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) \end{aligned}$$

*** **

2) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

3) $\int \sqrt{p^2 + (mx + n)^2} dx$

Per lo studio degli integrali (2) e (3) si sfrutta il lavoro sviluppato per lo studio dell'integrale (1).

Infatti dall'integrale (2) ci si riconduce all'integrale (1) notando che

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)} dx = |a| \int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{|a|} \right)^2} dx$$

Con la sostituzione $\frac{x}{|a|} = t$ si ha $dx = |a| dt$ e si perviene alla forma

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \cdot \int \sqrt{1+t^2} dt .$$

Per l'integrale (3) si effettuano due sostituzioni:

la prima ponendo

$mx + n = z$, dalla quale si ricava $dx = \frac{dz}{m}$ e semplificando si riconduce l'integrale indefinito alla forma

$$\int \sqrt{p^2 + (mx + n)^2} dx = \frac{1}{m} \int \sqrt{p^2 + z^2} dz;$$

con la seconda sostituzione $\frac{z}{|p|} = t$ si passa alla forma

$$\frac{1}{m} \int \sqrt{p^2 + z^2} dz = \frac{p^2}{m} \cdot \int \sqrt{1+t^2} dt$$

A questo punto è immediato ottenere i risultati per i due integrali (2) e (3). Per il primo dei due si ha la forma

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{8} \left(\sqrt{x^2 + a^2} + x \right)^2 + \frac{a^2}{2} \cdot \log \left(\sqrt{x^2 + a^2} + x \right) - \frac{a^4}{8 \left(\sqrt{x^2 + a^2} + x \right)^2} + C$$

Per quanto concerne la forma algebrica del secondo integrale riteniamo sia superfluo riportala e si lascia il compito come esercizio al lettore.