

Esercitazione sugli integrali generalizzati (impropri)

- 1) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ La funzione integranda non è definita nell'estremo $x=0$ e per $x \rightarrow 0^+$ tende a $+\infty$. Con

$0 < \varepsilon < 1$ si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log x]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 1 - \log \varepsilon) = -(-\infty) = +\infty$$

Conclusione

L'integrale diverge positivamente e **la funzione $1/x$ non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $]0;1]$.**

- 2) $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ La funzione integranda non è definita nell'estremo $x=0$ e per $x \rightarrow 0^+$ tende a $+\infty$. Con

$0 < \varepsilon < 1$ si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^8 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_{\varepsilon}^8 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \left(8^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right) = 6$$

Conclusione

L'integrale è convergente e **la funzione $1/\sqrt[3]{x}$ è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $]0;8]$.**

- 3) $\int_0^1 \log x dx$ La funzione non è definita nel punto $x=0$ e per $x \rightarrow 0^+$ tende a $-\infty$. Con $0 < \varepsilon < 1$ occorre studiare il seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log x dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito integrando per parti.

$$\int \log x dx = \int D(x) \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c$$

Passiamo ora al limite dell'integrale definito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x \log x - x]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((1 \cdot \log 1 - 1) - (\varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon)) = (-1) - (0 - 0) = -1$$

Nello studio del limite si è tenuto conto del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \cdot \log_a x = 0, \text{ che sussiste } \forall r > 0 \text{ e } (\forall a > 0 \wedge a \neq 1).$$

Conclusione

L'integrale è convergente e **la funzione $\log x$ è integrabile in senso generalizzato in $]0;1]$.**

- 4) $\int_0^1 \log^2 x dx$ La funzione non è definita nel punto $x=0$ e per $x \rightarrow 0^+$ tende a $+\infty$. Con $0 < \varepsilon < 1$ occorre studiare il seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log^2 x dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito integrando per parti.

$$\int \log^2 x dx = x \log^2 x - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log^2 x - 2 \int \log x dx = x \log^2 x - 2(x \log x - x) + c^{(1)}$$

Studio del limite dell'integrale definito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \log^2 x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[x \log^2 x - 2(x \log x - x) \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 - (\varepsilon \log^2 \varepsilon - 2(\varepsilon \log \varepsilon - \varepsilon)) \right] = 2$$

Si osservi che nello studio del limite sono stati tenuti presenti i due limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \log \varepsilon = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \log^2 \varepsilon = 0$$

per il secondo dei quali si lascia come utile esercizio al lettore la verifica.

Conclusione

L'integrale è convergente e **la funzione $\log^2 x$ è integrabile in senso generalizzato in $]0;1]$.** (Figura1)

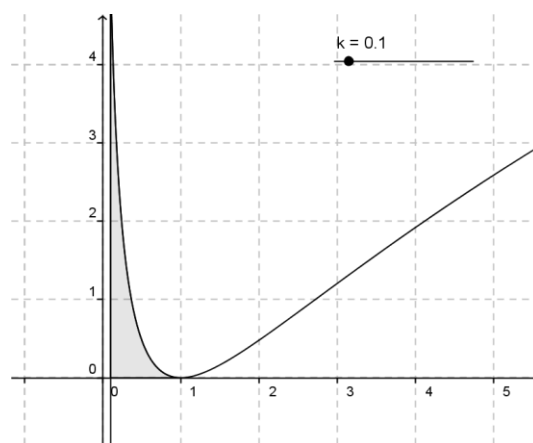


Figura 1

5) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2 - 1} dx$

Lo studio dell'integrale si esegue studiando il seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_2^k \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

⁽¹⁾ L'integrale indefinito $\int \log x dx$ è stato calcolato nel precedente esercizio n.3

E' necessario risolvere l'integrale indefinito $\int \frac{x}{x^2-1} dx$, che è praticamente immediato; infatti, moltiplicando il numeratore per 2 vi compare la derivata del denominatore, perciò si ha:

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \log|x^2-1| + c$$

Calcolo dell'integrale definito

$$\int_2^k \frac{x}{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} \log|x^2-1| \right]_2^k = \frac{1}{2} [\log|k^2-1| - \log 3]$$

Studio del limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} [\log|k^2-1| - \log 3] = \frac{1}{2} (+\infty - \log 3) = +\infty$$

Conclusione

L'integrale generalizzato diverge positivamente e quindi **la funzione non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[2; +\infty[$** . (Figura 2)

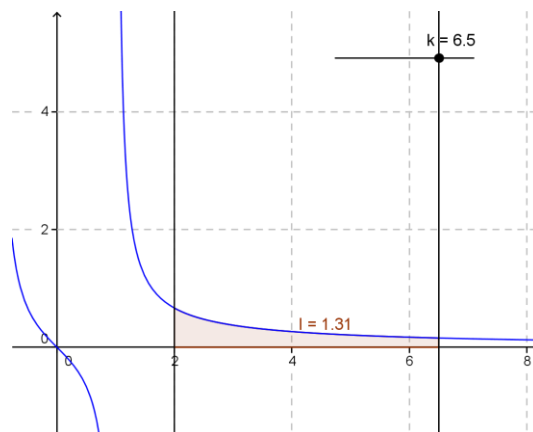


Figura 2

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$$

Si deve studiare il seguente limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2+4} dx$.

$$\text{Integrale indefinito: } \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

Integrale definito e studio del limite

$$\int_1^k \frac{1}{x^2+4} dx = \left[\frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) \right]_1^k = \frac{1}{2} \left[\arctg\left(\frac{k}{2}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

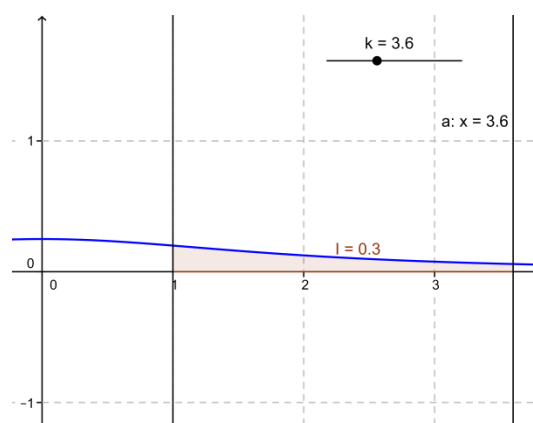


Figura 3

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{k}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

L'integrale generalizzato è convergente e quindi **la funzione integranda è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo considerato.** (Figura 3)

$$7) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

La funzione integranda non è definita nell'estremo $x=1$ in cui presenta un punto di discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty.$$

Con $0 < \varepsilon < 2$ è integrabile in ciascun intervallo $[-1; 1-\varepsilon]$; si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Per l'integrale indefinito corrispondente si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= -\int -(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= -\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -2\sqrt{1-x} + c, \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_{-1}^{1-\varepsilon} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2} \right) &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Conclusione

L'integrale è convergente e **la funzione è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[-1;1]$.** (Figura 4)

$$8) \int_1^e \frac{1}{x \log x} dx$$

La funzione integranda non è definita nell'estremo $x=1$; si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x \log x} dx, \text{ con } 0 < \varepsilon < e-1.$$

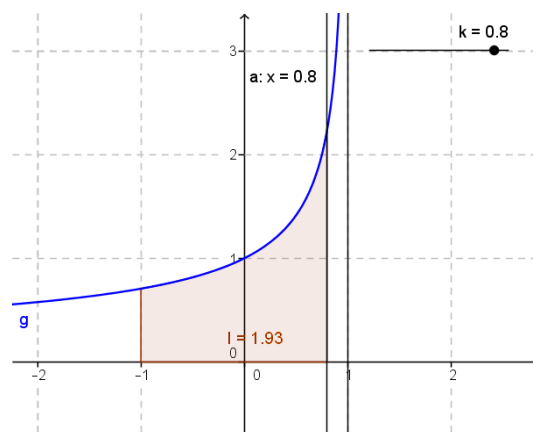


Figura 4

Per l'integrale indefinito si ha

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1/x}{\log x} dx = \log |\log x| + c$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log |\log x|]_{1+\varepsilon}^e =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log 1 - \log(\log(1+\varepsilon))] = 0 - \log(0^+) = +\infty$$

Conclusione

L'integrale diverge positivamente e **la funzione non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo [1;e].**
(Figura 5)

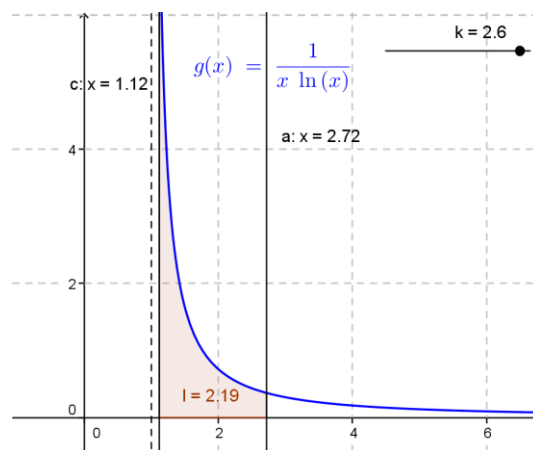


Figura 5

9) Dimostrare che l'integrale

$$\int_1^e \frac{1}{x \log^2 x} dx \quad \text{diverge positivamente.}$$

10) $\int_1^{+\infty} \arctg x dx$

Si deve studiare il seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \arctg x dx$$

Calcolo dell'integrale indefinito (con il metodo di integrazione per parti)

$$\int \arctg x dx = \int D(x) \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

Studio del limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k \arctg x dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_1^k =$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[k \cdot \arctg k - \frac{1}{2} \log(1+k^2) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) \right] \quad (*)$$

Si presenta un limite della forma indeterminata $\infty - \infty$ che affrontiamo di seguito.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \cdot \arctg k - \frac{1}{2} \log(1+k^2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} k \cdot \left(\arctg k - \frac{\log(1+k^2)}{2k} \right) \quad (**)$$

Osserviamo che il limite del secondo termine tra parentesi nella (**) si può studiare applicando la regola di de l'Hôpital;

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+k^2)}{2k} \stackrel{H.}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k}{1+k^2} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

e quindi risulta

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \cdot \left(\arctg k - \frac{\log(1+k^2)}{2k} \right) = +\infty \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = +\infty$$

Ritornando al limite (*) si ha

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[k \cdot \arctg k - \frac{1}{2} \log(1+k^2) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) \right] = \\ \left[\lim_{k \rightarrow +\infty} k \cdot \arctg k - \frac{1}{2} \log(1+k^2) \right] - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) = +\infty - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right) = +\infty \end{aligned}$$

Conclusione

L'integrale diverge positivamente e **la funzione non è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo considerato.**