

Esercitazione sugli integrali indefiniti di funzioni razionali fratte⁽¹⁾

Nota

Gli esercizi sono raggruppati per livello di difficoltà indicato con Liv_x, con $1 \leq x \leq 3$.

$$1) \int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \log|3x-1| + c \quad (\text{Liv}_1)$$

$$2) \int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{dx}{-(x-1)} = -\int \frac{dx}{x-1} = -\log|x-1| + c$$

$$3) \int \frac{\pi dx}{7x-30} = \frac{\pi}{7} \int \frac{7dx}{7x-30} = \frac{\pi}{7} \log|7x-30| + c$$

$$4) \int \frac{2x^2 - 4x + 7}{2x+1} dx = \dots \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{19}{4} \log|2x+1| + c \quad (\text{Liv}_2)$$

$$5) \int \frac{x^3+1}{x-1} dx = \dots = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \log|x-1| + c$$

$$6) \int \frac{x^3+30x^2+6x+2014}{x+1} dx = \dots = \frac{x^3}{3} + \frac{29}{2}x^2 - 23x + 2037 \log|x+1| + c$$

$$7) \int \frac{x-3}{2x^2+x-10} dx \quad (\text{Liv}_3)$$

Osserviamo che $\Delta = 81 > 0$, le radici dell'equazione $2x^2 + x - 10 = 0$ sono $x_1 = -\frac{5}{2}$,

$x_2 = 2$, quindi possiamo scrivere $2x^2 + x - 10 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)$ e conseguentemente

$$\int \frac{x-3}{2x^2+x-10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x-3}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)} dx.$$

Si cercano ora le due costanti A_1, A_2 che verificano l'uguaglianza

$$\frac{x-3}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)} = \frac{A_1}{x + \frac{5}{2}} + \frac{A_2}{x-2}, \dots$$

$$8) \int \frac{x^3-x-2}{3x^2-x-2} dx$$

Occorre eseguire preliminarmente la divisione tra numeratore e denominatore....

...

Nota_1

Si ricordi l'integrale immediato

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c,$$

con c costante reale arbitraria.

Nota_2

Si ricordi che l'integrale

$$\int \frac{P_n(x)}{ax+b} dx, \text{ con } P_n(x)$$

polinomio di grado $n \geq 1$, dopo aver eseguito la divisione $P_n(x) : (ax+b)$, detti $Q(x)$ e R

rispettivamente il quoziente ed il resto ottenuti, si riduce alla seguente somma

$$\int Q(x) dx + \int \frac{R}{ax+b} dx$$

Nota_3

Si ricordi che per

$$\text{l'integrale } \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$$

, con $a \neq 0$, se risulta

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ allora dette x_1, x_2 le radici reali dell'equazione

$ax^2 + bx + c = 0$, si può scrivere $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, quindi

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} dx \text{ e si}$$

possono determinare le due costanti reali A_1, A_2 ,

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$, $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Nepero $e=2,71828182845\dots$. Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale di $x>0$ è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$, $\ln(x)$. Quando si considera il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

$$\int \frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - x - 2} dx = \dots = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9} \int \frac{x+8}{3x^2 - x - 2} dx$$

...

Esercizi proposti

Verificare che risulta

- a) $\int \frac{6x-4}{3x+2} dx = 2x - \frac{8}{3} \log|3x+2| + c$
- b) $\int \frac{x}{x^2+3x-10} dx = \frac{5}{7} \log|x+5| + \frac{2}{7} \log|x-2| + c$
- c) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x-6} dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{28}{5} \log|x+3| + \frac{7}{5} \log|x-2| + c$

tramite il **principio di identità dei polinomi**, che verificano l'uguaglianza

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}.$$