

Esercitazione sugli integrali indefiniti di funzioni razionali fratte⁽¹⁾

Nota

Gli esercizi sono raggruppati per livello di difficoltà indicato con Liv_x, con $1 \leq x \leq 3$.

$$1) \int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x-1} = \frac{1}{3} \log|3x-1| + c \quad (\text{Liv}_1)$$

$$2) \int \frac{dx}{1-x} = \int \frac{dx}{-(x-1)} = -\int \frac{dx}{x-1} = -\log|x-1| + c$$

$$3) \int \frac{\pi dx}{7x-30} = \frac{\pi}{7} \int \frac{7dx}{7x-30} = \frac{\pi}{7} \log|7x-30| + c$$

$$4) \int \frac{2x^2 - 4x + 7}{2x+1} dx = \quad (\text{Liv}_2)$$

$$\int \left(x - \frac{5}{2}\right) dx + \int \frac{19/2}{2x+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{19}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{19}{4} \log|2x+1| + c$$

$$5) \int \frac{x^3+1}{x-1} dx =$$

$$\int (x^2 + x + 1) dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \log|x-1| + c$$

$$6) \int \frac{x^3 + 30x^2 + 6x + 2014}{x+1} dx = \int (x^2 + 29x - 23) dx + \int \frac{2037}{x+1} dx =$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{29}{2}x^2 - 23x + 2037 \log|x+1| + c$$

$$7) \int \frac{x-3}{2x^2+x-10} dx \quad (\text{Liv}_3)$$

Osserviamo che $\Delta = 81 > 0$, le radici dell'equazione $2x^2 + x - 10 = 0$ sono $x_1 = -\frac{5}{2}$,

$x_2 = 2$, quindi possiamo scrivere $2x^2 + x - 10 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)$ e conseguentemente

$$\int \frac{x-3}{2x^2+x-10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x-3}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)} dx.$$

Si cercano ora le due costanti A_1, A_2 che verificano l'uguaglianza

$$\frac{x-3}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)} = \frac{A_1}{x + \frac{5}{2}} + \frac{A_2}{x-2}, \text{ che diventa } \frac{x-3}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)} = \frac{(A_1 + A_2)x - 2A_1 + \frac{5}{2}A_2}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-2)},$$

dalla quale, imponendo l'uguaglianza dei numeratori

$$x-3 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 + \frac{5}{2}A_2 \text{ e applicando il principio di identità dei polinomi si}$$

perviene al sistema

Nota_1

Si ricordi l'integrale immediato

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \log|\varphi(x)| + c,$$

con c costante reale arbitraria.

Nota_2

Si ricordi che l'integrale

$$\int \frac{P_n(x)}{ax+b} dx, \text{ con } P_n(x)$$

polinomio di grado $n \geq 1$, dopo aver eseguito la divisione $P_n(x) : (ax+b)$, detti $Q(x)$ e R

rispettivamente il quoziente ed il resto ottenuti, si riduce alla seguente somma

$$\int Q(x) dx + \int \frac{R}{ax+b} dx$$

Nota_3

Si ricordi che per l'integrale

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx, \text{ con } a \neq 0,$$

se risulta $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ allora dette x_1, x_2 le radici reali dell'equazione

$ax^2 + bx + c = 0$, si può scrivere $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, quindi

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx =$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} dx \text{ e si}$$

possono determinare le due costanti reali A_1, A_2 ,

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$, $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Nepero $e=2,71828182845...$ Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale di $x>0$ è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$, $\ln(x)$. Quando si considera il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -2A_1 + \frac{5}{2}A_2 = -3 \end{cases}, \text{ che risolto fornisce } \begin{cases} A_1 = \frac{11}{9} \\ A_2 = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Procediamo con il calcolo dell'integrale.

$$\frac{1}{2} \int \frac{x-3}{\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-2)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\frac{11}{9}}{x+\frac{5}{2}} - \frac{\frac{2}{9}}{x-2} \right) dx = \frac{11}{18} \int \frac{1}{x+\frac{5}{2}} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{x-2} dx =$$

$$\frac{11}{18} \log \left| x + \frac{5}{2} \right| - \frac{1}{9} \log |x-2| + c$$

8) $\int \frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - x - 2} dx$

Occorre eseguire preliminarmente la divisione tra numeratore e denominatore per scrivere la frazione integranda come somma di un polinomio e di una frazione avente lo stesso denominatore $3x^2 - x - 2$ e come numeratore un polinomio avente grado minore o uguale ad uno.

Eseguiti i calcoli necessari per la suddetta divisione si ottiene

$$\frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - x - 2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{2}{9}x - \frac{16}{9}}{3x^2 - x - 2}, \text{ quindi}$$

$$\int \frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - x - 2} dx = \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) dx - \frac{2}{9} \int \frac{x+8}{3x^2 - x - 2} dx = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9} \int \frac{x+8}{3x^2 - x - 2} dx$$

Per l'integrale residuo, essendo lo stesso del tipo indicato nella Nota_3, si esegue un procedimento analogo a quello descritto nel corrispondente integrale dell'esercizio n.7. Si ottiene

$$-\frac{2}{9} \int \frac{x+8}{3x^2 - x - 2} dx = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \int \frac{x+8}{\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)} dx = \dots = -\frac{2}{27} \int \left(-\frac{22}{5} \cdot \frac{1}{x+\frac{2}{3}} + \frac{27}{5} \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$\frac{44}{135} \log \left| x + \frac{2}{3} \right| - \frac{2}{5} \log |x-1| + c$$

In conclusione, per l'integrale indefinito in esame si ha

$$\int \frac{x^3 - x - 2}{3x^2 - x - 2} dx = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{9}x + \frac{44}{135} \log \left| x + \frac{2}{3} \right| - \frac{2}{5} \log |x-1| + c$$

Esercizi proposti

Verificare che risulta

a) $\int \frac{6x-4}{3x+2} dx = 2x - \frac{8}{3} \log |3x+2| + c$

b) $\int \frac{x}{x^2+3x-10} dx = \frac{5}{7} \log |x+5| + \frac{2}{7} \log |x-2| + c$

c) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x-6} dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{28}{5} \log |x+3| + \frac{7}{5} \log |x-2| + c$

tramite il **principio di identità dei polinomi**, che verificano l'uguaglianza

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}.$$