

Regola di Hermite⁽¹⁾

Per l'integrazione delle funzioni razionali fratte

Quando la funzione integranda è una funzione razionale fratta che ridotta ai minimi termini ha come denominatore un polinomio che presenta radici multiple, sia che siano reali, sia che siano complesse, si può eseguire l'integrazione con la regola di Hermite che qui presentiamo.

Supponiamo che si debba calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx$$

e sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. la frazione integranda è ridotta ai minimi termini, quindi i polinomi $P_1(x)$, $P_2(x)$ non hanno fattori comuni;
2. $P_1(x)$ è di grado inferiore a $P_2(x)$;
3. il denominatore sia stato scomposto in fattori e presenta potenze che hanno come basi dei binomi di primo grado o trinomi di secondo grado con discriminante negativo ($\Delta < 0$)

$$P_2(x) = \prod_{i=1}^h (m_i x + n_i)^{r_i} \cdot \prod_{j=1}^k (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{s_j}$$

e sussistano le seguenti proprietà

- a) le equazioni $m_i x + n_i = 0$ hanno a due a due radici distinte;
- b) le equazioni $a_j x^2 + b_j x + c_j = 0$ hanno $\Delta_j = b_j^2 - 4a_j c_j < 0$ e a due a due non hanno radici comuni;
- c) almeno uno degli esponenti $r_1, r_2, \dots, r_h, s_1, s_2, \dots, s_k$ sia maggiore di uno.

Indicato con $P_2^*(x)$ il polinomio che si ottiene da $P_2(x)$ abbassando di una unità tutti gli esponenti $r_1, r_2, \dots, r_h, s_1, s_2, \dots, s_k$, con

$$r = \text{grado}(P_2^*(x)) - 1$$

si dimostra che esistono

$$r + 1 + h + 2k$$

costanti che indichiamo con

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, A_1, A_2, \dots, A_h, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_k, C_k,$$

⁽¹⁾ Confrontare il volume: Lezioni di Analisi Matematica di R. Fiorenza, parte II, pag.46,47. Liguori Editore - Napoli 1971

che soddisfano la seguente uguaglianza

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \sum_{i=1}^h \frac{A_i}{m_i x + n_i} + \sum_{j=1}^k \frac{B_j x + C_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \left(\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}{P_2^*(x)} \right)' \quad (1)$$

Si noti che l'ultimo termine è la derivata prima della frazione $\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}{P_2^*(x)}$.

Note operative per l'applicazione della regola di Hermite

- 1) Tutte le costanti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, A_1, A_2, \dots, A_h, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_k, C_k$, si determinano riducendo il secondo membro della (1) ad un'unica frazione e applicando opportunamente il principio di identità dei polinomi.
- 2) Nella formula (1) sarà soppressa la prima sommatoria qualora risulti $r_1=r_2=\dots=r_h=0$; analogamente sarà soppressa la seconda sommatoria qualora si abbia $s_1=s_2=\dots=s_k=0$.

*** **

Esercizi applicativi

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$1) \int \frac{2x-3}{x^2(x+1)(x^2+x+3)} dx$$

Elaborazioni

Risulta $P_2^*(x) = x$, polinomio di primo grado, quindi $r = 1-1 = 0$.

Si devono determinare le costanti

$$a_0, A_1, A_2, B_1, C_1$$

in modo che sussista l'uguaglianza

$$\frac{2x-3}{x^2(x+1)(x^2+x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+x+3} + \left(\frac{a_0}{x} \right)' = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+x+3} - \frac{a_0}{x^2}$$

Dopo aver sommato le frazioni dell'ultima espressione si nota che il denominatore è uguale a quello della frazione integranda, quindi l'uguaglianza sussiste se e solo se il numeratore della frazione integranda è uguale a quello della frazione ottenuta nell'ultima espressione. Dal **principio di identità dei polinomi** si perviene al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B_1 = 0 \\ 2A_1 + A_2 + B_1 + C_1 - a_0 = 0 \\ 4A_1 + 3A_2 + C_1 - 2a_0 = 0 \\ 3A_1 - 4a_0 = 2 \\ -3a_0 = -3 \end{cases} \quad \text{la cui soluzione è } a_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = -\frac{5}{3}, B_1 = -\frac{1}{3}, C_1 = -1.$$

L'integrale proposto si decomporrà nella seguente forma

$$\int \frac{2x-3}{x^2(x+1)(x^2+x+3)} dx = \int \frac{2}{x} dx - \frac{5}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x-1}{x^2+x+3} dx + \int \left(\frac{1}{x}\right)' dx$$

il cui risultato è

$$2 \log|x| - \frac{5}{3} \log|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \log(x^2+x+3) - \frac{5}{12\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{21}}\right) + c$$

*** **

$$2) \quad I = \int \frac{x^2+2}{x^3(x-1)(x^2+4)} dx$$

Elaborazioni

Tenendo presente la regola di Hermite, con $P_2(x) = x^3(x-1)(x^2+4)$ si ha $P_2^*(x) = x^2$, quindi

$r = \text{grado}(P_2^*(x)) - 1 = 1$ e si devono determinare le costanti $a_0, a_1, A_1, A_2, B_1, C_1$ che verificano la seguente uguaglianza:

$$\frac{x^2+2}{x^3(x-1)(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+4} + \left(\frac{a_0+a_1x}{x^2}\right)' \quad \text{da cui}$$

$$\frac{x^2+2}{x^3(x-1)(x^2+4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+4} - \frac{2a_0+a_1x}{x^3}$$

Riducendo la somma delle frazioni al secondo membro ad un'unica frazione avente come denominatore quello della frazione al primo membro ed eseguendo le necessarie operazioni di semplificazione si ottiene come numeratore il seguente polinomio:

$$(A_1 + A_2 + B_1)x^5 + (-A_1 - B_1 + C_1 - a_1)x^4 + (4A_1 + 4A_2 - C_1 + a_1 - 2a_0)x^3 + (-4A_1 - 4a_1 + 2a_0)x^2 + (4a_1 - 8a_0)x + 8a_0$$

che deve coincidere con il polinomio $x^2 + 2$ e dunque deve sussistere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B_1 = 0 \\ -A_1 - B_1 + C_1 - a_1 = 0 \\ 4A_1 + 4A_2 - C_1 + a_1 - 2a_0 = 0 \\ -4A_1 - 4a_1 + 2a_0 = 1 \\ 4a_1 - 8a_0 = 0 \\ 8a_0 = 2 \end{cases}, \text{ da cui si ricava}$$

$$A_1 = -\frac{5}{8}, A_2 = \frac{3}{5}, B_1 = \frac{1}{40}, C_1 = -\frac{1}{10}, a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = \frac{1}{2}$$

Esecuzione dell'integrale

$$I = \int \left(-\frac{5}{8x} + \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{40} \cdot \frac{x-4}{x^2+4} \right) dx + \int \left(\frac{a_0 + a_1 x}{x^2} \right) dx = -\frac{5}{8} \log|x| + \frac{3}{5} \log|x-1| +$$

$$\frac{1}{40} \int \frac{x-4}{x^2+4} dx + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x \right) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Calcoliamo l'integrale residuo

$$I_2 = \frac{1}{40} \int \frac{x-4}{x^2+4} dx = \frac{1}{40 \cdot 2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{80} \log(x^2+4) - \frac{1}{40} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx =$$

$$\frac{1}{80} \log(x^2+4) - \frac{1}{20} \int \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{80} \log(x^2+4) - \frac{1}{20} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

In conclusione si ha

$$I = -\frac{5}{8} \log|x| + \frac{3}{5} \log|x-1| + \left[\frac{1}{80} \log(x^2+4) - \frac{1}{20} \arctg\left(\frac{x}{2}\right) \right] + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x} + c$$

*** **

$$3) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Elaborazioni

Per la regola di Hermite con $P_2(x) = (1+x^2)^3$ si ha $P_2^*(x) = (1+x^2)^2$, quindi

$r = \text{grado}(P_2^*(x)) - 1 = 3$; si devono determinare le costanti $a_0, a_1, a_2, a_3, B_1, C_1$ che verificano la seguente uguaglianza

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{B_1 x + C_1}{1+x^2} + \left(\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{(1+x^2)^2} \right) \quad (3.1)$$

Dopo aver eseguito la derivata prima che compare nel secondo membro della (3.1) e sommato le due frazioni al secondo membro questo diventa

$$\frac{[B_1 x^5 + (C_1 - a_3)x^4 + 2(B_1 - a_2)x^3 + (2C_1 + 3a_3 - 3a_1)x^2 + (B_1 + 2a_2 - 4a_0)x + (C_1 + a_1)]}{(1+x^2)^3}$$

Dal confronto dei numeratori si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ C_1 - a_3 = 0 \\ 2(B_1 - a_2) = 0 \\ 2C_1 + 3a_3 - 3a_1 = 1 \\ B_1 + 2a_2 - 4a_0 = 0 \\ C_1 + a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui } B_1 = 0, C_1 = \frac{1}{8}, a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{8}, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{8}.$$

L'integrale in esame diventa

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \int \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx + \int \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{-x+x^3}{(1+x^2)^2} \right) dx = \frac{1}{8} \arctg x + \frac{x^3 - x}{8(1+x^2)^2} + c$$

*** **

4) Applicando la regola di Hermite risolvere il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{5x-2}{x^2(x-1)^3} dx$$

Elaborazioni

Con $P_2(x) = x^2(x-1)^3$ si ha $P_2^*(x) = x(x-1)^2$, quindi $r = \text{grado}(P_2^*(x)) - 1 = 2$;

Si devono determinare le costanti a_0, a_1, a_2, A_1, A_2 che verificano l'uguaglianza

$$\frac{5x-2}{x^2(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \left(\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{x(x-1)^2} \right);$$

eseguendo i calcoli si ottengono i valori

$$A_1 = -7, A_2 = 7, a_0 = -2, a_1 = \frac{35}{6}, a_2 = -\frac{7}{3}$$

L'integrale si trasforma come segue

$$\int \frac{5x-2}{x^2(x-1)^3} dx = \int \frac{-7}{x} dx + \int \frac{7}{x-1} dx + \frac{-2 + \frac{35}{6}x - \frac{7}{3}x^2}{x(x-1)^2} =$$
$$-7 \log|x| + 7 \log|x-1| - \frac{14x^2 - 35x + 12}{6x(x-1)^2} + c$$