

Regola di Hermite⁽¹⁾

Per l'integrazione delle funzioni razionali fratte

Quando la funzione integranda è una funzione razionale fratta che ridotta ai minimi termini ha come denominatore un polinomio che presenta radici multiple, sia che siano reali, sia che siano complesse, si può eseguire l'integrazione con la regola di Hermite che qui presentiamo.

Supponiamo che si debba calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx$$

e sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. la frazione integranda è ridotta ai minimi termini, quindi i polinomi $P_1(x)$, $P_2(x)$ non hanno fattori comuni;
2. $P_1(x)$ è di grado inferiore a $P_2(x)$;
3. il denominatore sia stato scomposto in fattori e presenta potenze che hanno come basi dei binomi di primo grado o trinomi di secondo grado con discriminante negativo ($\Delta < 0$)

$$P_2(x) = \prod_{i=1}^h (m_i x + n_i)^{r_i} \cdot \prod_{j=1}^k (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{s_j}$$

e sussistano le seguenti proprietà

- a) le equazioni $m_i x + n_i = 0$ hanno a due a due radici distinte;
- b) le equazioni $a_j x^2 + b_j x + c_j = 0$ hanno $\Delta_j = b_j^2 - 4a_j c_j < 0$ e a due a due non hanno radici comuni;
- c) almeno uno degli esponenti $r_1, r_2, \dots, r_h, s_1, s_2, \dots, s_k$ sia maggiore di uno.

Indicato con $P_2^*(x)$ il polinomio che si ottiene da $P_2(x)$ abbassando di una unità tutti gli esponenti $r_1, r_2, \dots, r_h, s_1, s_2, \dots, s_k$, con

$$r = \text{grado}(P_2^*(x)) - 1$$

si dimostra che esistono

$$r + 1 + h + 2k$$

costanti che indichiamo con

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, A_1, A_2, \dots, A_h, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_k, C_k,$$

⁽¹⁾ Confrontare il volume: Lezioni di Analisi Matematica di R. Fiorenza, parte II, pag.46,47. Liguori Editore - Napoli 1971

che soddisfano la seguente uguaglianza

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \sum_{i=1}^h \frac{A_i}{m_i x + n_i} + \sum_{j=1}^k \frac{B_j x + C_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} + \left(\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}{P_2^*(x)} \right)' \quad (1)$$

Si noti che l'ultimo termine è la derivata prima della frazione $\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r}{P_2^*(x)}$.

Note operative per l'applicazione della regola di Hermite

- 1) Tutte le costanti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, A_1, A_2, \dots, A_h, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_k, C_k$, si determinano riducendo il secondo membro della (1) ad un'unica frazione e applicando opportunamente il principio di identità dei polinomi.
- 2) Nella formula (1) sarà soppressa la prima sommatoria qualora risulti $r_1=r_2=\dots=r_h=0$; analogamente sarà soppressa la seconda sommatoria qualora si abbia $s_1=s_2=\dots=s_k=0$.

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$1) \int \frac{2x-3}{x^2(x+1)(x^2+x+3)} dx$$

$$\text{Risultato: } 2 \log|x| - \frac{5}{3} \log|x+1| + \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \log(x^2+x+3) - \frac{5}{12\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{21}}\right) + c$$

$$2) \int \frac{x^2+2}{x^3(x-1)(x^2+4)} dx$$

$$\text{Risultato: } -\frac{5}{8} \log|x| + \frac{3}{5} \log|x-1| + \left[\frac{1}{80} \log(x^2+4) - \frac{1}{20} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \right] + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x} + c$$

$$3) \int \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

$$\text{Risultato: } \int \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{x^3-x}{8(1+x^2)^2} + c$$

$$4) \int \frac{5x-2}{x^2(x-1)^3} dx$$

$$\text{Risultato: } \int \frac{5x-2}{x^2(x-1)^3} dx = -7 \log|x| + 7 \log|x-1| - \frac{14x^2-35x+12}{6x(x-1)^2} + c$$