

Studio di un integrale indefinito

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{x\sqrt{x+1}} dx$$

Elaborazioni

Strategia risolutiva

Si deve determinare il dominio di definizione della funzione integranda, quindi affrontare l'integrale trasformando la funzione integranda in modo che contenga un solo radicale, successivamente effettuare una sostituzione di variabile per ottenere come funzione integranda una razionale fratta; una volta ottenuta la funzione razionale si analizza la corrispondente frazione per scomporla nella somma di più frazioni che permetteranno di ricondurre il calcolo dell'integrale alla somma di due o più integrali immediati.

1) Dominio di definizione

Osserviamo che la funzione è definita per i valori della variabile che verificano le condizioni (C.d.E.)

$$(2x-1 \geq 0) \wedge (x \neq 0) \wedge (x+1 > 0), \text{ da cui } x \geq \frac{1}{2}. \text{ Dominio } D = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

2) Nel dominio D razionalizziamo il denominatore della frazione.

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{x\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{2x^2+x-1}}{x(x+1)}$$

$$\text{L'integrale da studiare diventa } \int \frac{\sqrt{2x^2+x-1}}{x(x+1)} dx.$$

3) Affrontiamo l'integrale operando la sostituzione $\sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{2}x+t$, da cui dopo alcune elaborazioni si ricava

$$x = \frac{t^2+1}{1-2\sqrt{2}t} = \varphi(t). \text{ Si determina ora il differenziale } dx:$$

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{2t(1-2\sqrt{2}t) - (t^2+1)(-2\sqrt{2})}{(1-2\sqrt{2}t)^2} dt = \frac{-2(\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2})}{(1-2\sqrt{2}t)^2} dt$$

$$\text{Il radicale quadratico } \sqrt{2x^2+x-1} \text{ diventa}$$

$$\sqrt{2x^2+x-1} = \frac{t^2+1}{1-2\sqrt{2}t} + t = \frac{-\sqrt{2}t^2+t+\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}t}$$

Nuova espressione dell'integrale indefinito

$$I = \int \frac{\sqrt{2x^2+x-1}}{x(x+1)} dx = \int \frac{-\sqrt{2}t^2+t+\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}t} \cdot \frac{(1-2\sqrt{2}t)}{t^2+1} \cdot \frac{1}{\frac{t^2+1}{1-2\sqrt{2}t}+1} \cdot \frac{-2(\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2})}{(1-2\sqrt{2}t)^2} dt =$$

$$\dots = 2 \int \frac{(\sqrt{2}t+1)^2}{(t^2+1)(1-2\sqrt{2}t)} dt$$

4) La frazione integranda si può decomporre nella seguente forma

$$\frac{(\sqrt{2}t+1)^2}{(t^2+1)(1-2\sqrt{2}t)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{1-2\sqrt{2}t} \quad (*)$$

con A, B, C costanti da determinare.

Osserviamo che moltiplicando entrambi i membri dell'(*) per $(1-2\sqrt{2}t)$ e passando al limite per $t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$ nei due membri, dal secondo membro si ottiene C mentre dal limite del primo membro si ottiene il valore numerico da assegnare a C. Dunque

$$C = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}} \frac{(\sqrt{2}t+1)^2}{(t^2+1)} = \frac{\left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{9}{4} \cdot \frac{8}{9} = 2$$

Poniamo ora nel secondo membro della (*) C=2 e sommiamo le due frazioni. Si ha:

$$\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{2}{1-2\sqrt{2}t} = \frac{(2-2\sqrt{2}A)t^2 + (A-2\sqrt{2}B)t + B+2}{(t^2+1)(1-2\sqrt{2}t)}$$

La frazione ottenuta ha lo stesso denominatore della frazione presente al primo membro della (*) e dunque le due frazioni sono uguali se e solo se lo sono i rispettivi numeratori; pertanto deve aversi

$$2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = (2-2\sqrt{2}A)t^2 + (A-2\sqrt{2}B)t + B+2;$$

applicando il principio di identità dei polinomi si ricavano i valori A=0, B=-1.

Nuova forma dell'integrale indefinito e calcolo

L'integrale indefinito da calcolare assume la seguente forma:

$$I = 2 \int \left(\frac{-1}{t^2 + 1} + \frac{2}{1 - 2\sqrt{2}t} \right) dt = -2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} + \frac{2}{-\sqrt{2}} \int \frac{-2\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2}t} dt =$$

$$= -2 \operatorname{arctg}(t) - \sqrt{2} \log |1 - 2\sqrt{2}t| + c$$

essendo c una qualsiasi costante reale.

Torniamo ora alla variabile x

Dall'uguaglianza $\sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{2}x + t$ segue $t = \sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{2}x$ e quindi possiamo scrivere

$$\int \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{x(x+1)} dx = -2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{2}x \right) - \sqrt{2} \log \left| 1 - 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2x^2 + x - 1} - \sqrt{2}x \right) \right| + c.$$