

Integrali di funzioni razionali fratte

del tipo $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$, con $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

- | | |
|---|--|
| 1) $\int \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} dx$ | Ris. $\frac{1}{2} \ln x+1 + \frac{1}{2} \ln x+3 + C$ |
| 2) $\int \frac{x+3}{x^2-5x-6} dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x-6)} dx$ | Ris. $-\frac{2}{7} \ln x+1 + \frac{9}{7} \ln x-6 + C$ |
| 3) $\int \frac{2x-5}{4x^2+7x-2} dx$ | Ris. $-\frac{1}{2} \ln 4x-1 + 2 \ln x+2 + C$ |
| 4) $\int \frac{3x+5}{x^2+x-6} dx$ | |
| 5) $\int \frac{2x-1}{6x^2+5x+1} dx = \int \frac{2x-1}{(2x+1)(3x+1)} dx$ | |
| 6) $\int \frac{x-1}{4x^2-1} dx$ | Ris. $-\frac{1}{8} \ln 2x-1 + \frac{3}{8} \ln 2x+1 + C$ |
| 7) $\int \frac{x+4}{x^2-4x+3} dx$ | |
| 8) $\int \frac{3-x}{2x^2+5x-7} dx$ | Ris. $-\frac{13}{18} \ln 2x+7 + \frac{2}{9} \ln x-1 + 1$ |

Elaborazioni

1) $\int \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} dx$

Si devono determinare le due costanti A_1, A_2 che permettono di scrivere la seguente uguaglianza

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+3}$$

Le costanti si determinano riducendo il secondo membro ad un'unica frazione avente lo stesso denominatore della frazione al primo membro ed imponendo che la frazione ottenuta abbia lo stesso numeratore di quella al primo membro; a questo punto si applica il principio di identità dei polinomi e si ottengono le condizioni che permettono di determinare le costanti cercate.

$$\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+3} = \frac{A_1(x+3) + A_2(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A_1 + A_2)x + 3A_1 + A_2}{(x+1)(x+3)}$$

La frazione ottenuta ha lo stesso denominatore della frazione di partenza e l'uguaglianza tra le due

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A_1 + A_2)x + 3A_1 + A_2}{(x+1)(x+3)}$$

sussiste se e solo se risulta

$x+2 = (A_1 + A_2)x + 3A_1 + A_2$ e per il principio di identità dei polinomi ciò si verifica se e solo se le due costanti A_1, A_2 verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 3A_1 + A_2 = 2 \end{cases} \cdot \text{Risolto il sistema si ottiene} \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} \\ A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+3} dx =$$
$$\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+3| + C$$

*** **

2) $\int \frac{x+3}{(x+1)(x-6)} dx$ Trasformiamo la frazione integranda come segue

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-6)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-6} = \frac{A_1(x-6) + A_2(x+1)}{(x+1)(x-6)} = \frac{(A_1 + A_2)x - 6A_1 + A_2}{(x+1)(x-6)}$$

La frazione iniziale è uguale a quella finale se e solo se risulta

$$x+3 = (A_1 + A_2)x - 6A_1 + A_2 \quad \text{e per il principio di identità dei polinomi deve risultare}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -6A_1 + A_2 = 3 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} A_1 = -\frac{2}{7} \\ A_2 = \frac{9}{7} \end{cases}$$

Calcolo dell'integrale indefinito

Ritornando al calcolo dell'integrale si ha

$$\int \frac{x+3}{(x+1)(x-6)} dx = \int \left(-\frac{2}{7(x+1)} + \frac{9}{7(x-6)} \right) dx = -\frac{2}{7} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{9}{7} \int \frac{dx}{x-6} =$$
$$-\frac{2}{7} \ln|x+1| + \frac{9}{7} \ln|x-6| + C$$

*** **

$$3) \int \frac{2x-5}{4x^2+7x-2} dx$$

Osserviamo che il denominatore della frazione si può scrivere nella forma

$$4x^2 + 7x - 2 = (4x-1)(x+2)$$

Quindi si devono determinare le due costanti A_1, A_2 che verificano la seguente uguaglianza

$$\frac{2x-5}{(4x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{4x-1} + \frac{A_2}{x+2} \quad \text{Elaborando il secondo membro si perviene alla forma}$$

$$\frac{(A_1 + 4A_2)x + 2A_1 - A_2}{(4x-1)(x+2)}, \text{ perciò deve sussistere l'uguaglianza}$$

$2x-5 = (A_1 + 4A_2)x + 2A_1 - A_2$, quindi le costanti sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} A_1 + 4A_2 = 2 \\ 2A_1 - A_2 = -5 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = 1 \end{cases}.$$

Calcolo dell'integrale

$$\int \frac{2x-5}{4x^2+7x-2} dx = \int \left(\frac{-2}{4x-1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{4}{4x-1} dx + \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{2} \ln|4x-1| + 2 \ln|x+2| + C$$