

Sul calcolo di volumi di solidi di rotazione

Funzione esponenziale

In relazione alla funzione esponenziale $f(x) = e^x$ risolvere i quesiti che seguono.

- Scrivere l'equazione della retta tangente al diagramma della funzione nel punto A di ascissa $x=1$.
- Calcolare l'area della regione finita di piano F delimitata dal diagramma della funzione, dalla tangente in A e dall'asse delle ordinate.
- Calcolare il volume del solido descritto dalla figura F in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse e quello del solido descritto da F in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.

Soluzione

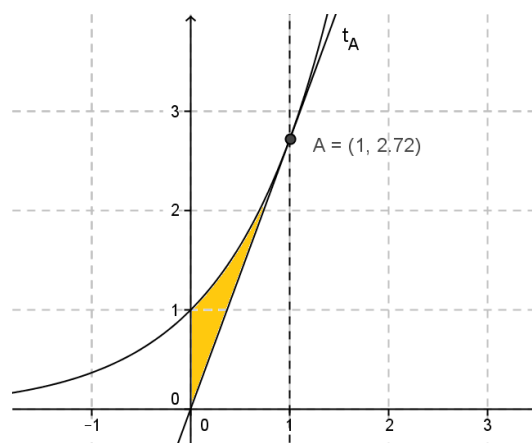
- a) L'equazione della retta tangente nel punto $A(1;f(1))=(1;e)$ è

$$t_A: y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Poiché $f'(x) = e^x$, si ha $f'(1) = e$, quindi

$$t_A: y - e = e(x - 1), \text{ da cui } t_A: y = ex.$$

- b) La retta tangente al diagramma della funzione nel punto $A(1;e)$ passa per l'origine degli assi cartesiani. L'area della figura piana F è



$$Area(F) = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - 1$$

- c) Il volume del solido di rotazione descritto dalla figura F nella rotazione completa attorno all'asse delle ascisse è dato dalla differenza di due integrali definiti; si ha:

$$V_x = \int_0^1 \pi (e^x)^2 dx - \int_0^1 \pi (ex)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \pi e^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 2e^{2x} dx - \pi e^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$
$$\frac{\pi}{2} [e^{2x}]_0^1 - \pi \frac{e^2}{3} = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) - \pi \frac{e^2}{3} = \frac{\pi}{6} (e^2 - 3)$$

Il volume del solido di rotazione descritto dalla figura F nella rotazione completa attorno all'asse delle ordinate è dato da

$$V_y = \int_0^1 2\pi x (e^x - ex) dx = 2\pi \int_0^1 x e^x dx - 2\pi e \int_0^1 x^2 dx$$

Il primo integrale indefinito si calcola applicando il metodo di integrazione per parti, mentre il secondo è immediato. Si ha:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c_1; \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c_2, \text{ con } c_1, c_2 \text{ costanti reali.}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 x e^x dx - 2\pi e \int_0^1 x^2 dx &= 2\pi \left[x e^x - e^x \right]_0^1 - 2\pi e \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi ((e - e) - (-1)) - \frac{2}{3} \pi e = \\ 2\pi - \frac{2}{3} \pi e &= \frac{2}{3} \pi (3 - e) \end{aligned}$$