Esercizi sul calcolo di volumi di solidi di rotazione

Funzione irrazionale intera e teorema di Guldino

Considerata la funzione $f(x) = \sqrt{3-x}$, risolvere i seguenti quesiti:

a) dopo averne rappresentato il diagramma, determinare il volume del solido descritto dal suo sottografico relativo all'intervallo [0;3] in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse e in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate. Confrontare i volumi dei due solidi di rotazione.

b) Osservato che il volume del solido ottenuto nella rotazione intorno all'asse delle ordinate è maggiore di quello descritto nella rotazione intorno all'asse delle ascisse, giustificare il risultato calcolando le coordinate del baricentro del sottografico servendosi del teorema di Guldino.

Soluzione

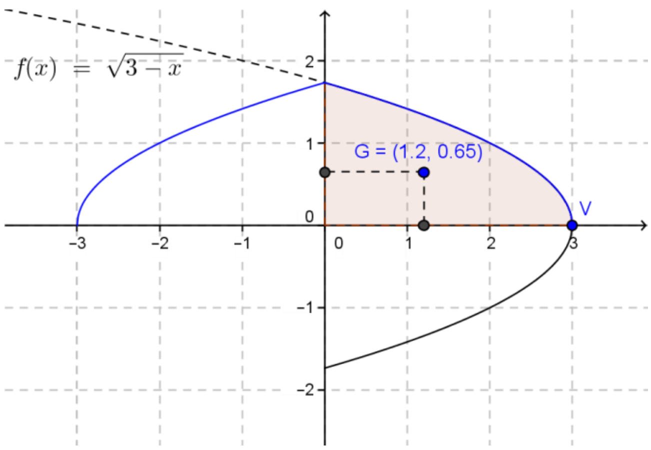
a) La funzione ha come diagramma la semiparabola avente vertice nel punto V(3;0), asse di simmetria coincidente con l'asse delle ascisse, concavità rivolta nel verso delle ascisse negative e giacente nel semipiano delle ordinate positive (curva in stile tratteggio in figura).

Volume del solido ottenuto nella rotazione attorno all'asse x

$$V_1 = \int_0^3 \pi\left(\sqrt{3-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^3 (3-x)\,dx = \pi\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9\pi}{2}$$

Volume del solido ottenuto nella rotazione attorno all'asse y

$$V_2 = \int_0^3 2\pi x\sqrt{3-x}\,dx$$



Per eseguire il calcolo dell'integrale indefinito si procede operando la sostituzione di variabile

$\sqrt{3-x} = t$, da cui $x = 3 - t^2$ e $dx = -2t\,dt$. Con la sostituzione indicata l'integrale definito si trasforma in uno equivalente nel quale gli estremi di integrazione diventano:

per $x = 0 \to t = \sqrt{3}$; $x = 3 \to t = 0$.

Calcoliamo l'integrale definito che si ottiene.

$$\int_0^3 2\pi x\sqrt{3-x}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^0 2\pi\left(3-t^2\right)t\cdot(-2t)\,dt = -4\pi\int_{\sqrt{3}}^0\left(3t^2-t^4\right)dt = -4\pi\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_{\sqrt{3}}^0 =$$

$$-4\pi\left(0-\left(\sqrt{3}\right)^3+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{5}\right) = \frac{24\pi}{5}\sqrt{3}$$

Rapporto dei volumi dei due solidi

$$V_1 : V_2 = \frac{9\pi}{2} : \left(\frac{24\pi}{5}\sqrt{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{16} \approx 0,54127$$

b) Il volume del solido descritto nella rotazione intorno all'asse delle ordinate è quasi il doppio di quello descritto nella rotazione intorno all'asse delle ascisse. Per giustificare il risultato ottenuto determiniamo le coordinate del baricentro G della figura piana costituita dal sottografico relativo all'intervallo [0;3] sfruttando il **teorema di Guldino[(1)]**.

Poiché nella formula prevista nel teorema di Guldino si deve utilizzare l'area **S** del sottografico relativo all'intervallo [0;3], calcoliamo detto valore. Si ha:

$$S = \int_0^3 \sqrt{3-x}\,dx = \int_0^3 (3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\int_0^3 -(3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\left[\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 2\sqrt{3}$$

Ascissa del baricentro: x_G.

In virtù del teorema di Guldino il volume V_2 del solido descritto dal sottografico nella rotazione intorno all'asse delle ordinate è

$$V_2 = 2\pi x_G \cdot S \text{, da cui } x_G = \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{\frac{24\pi}{5}\sqrt{3}}{2\pi\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{6}{5}$$

Ordinata del baricentro: y_G.

Ancora per il teorema di Guldino il volume V_1 del solido descritto dal sottografico nella rotazione intorno all'asse delle ascisse è

$$V_1 = 2\pi y_G \cdot S \text{, da cui } y_G = \frac{V_1}{2\pi S} = \frac{\frac{9\pi}{2}}{2\pi\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

---

(1) **Teorema di Guldino**. Se una figura piana F di area S ruota di un giro completo intorno ad una retta *a* giacente nel piano della figura, che non attraversi la figura, allora il volume del solido di rotazione descritto da F è uguale al prodotto dell'area della figura piana per la misura della circonferenza descritta nella rotazione dal baricentro della figura stessa.
Indicando con *r* la distanza del baricentro dall'asse *a* di rotazione il volume è: $V=2\pi r\cdot S$.

Dunque il baricentro della figura piana è $G\left(\frac{6}{5};\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$. Dal confronto tra le coordinate emerge che l'ascissa del baricentro è maggiore dell'ordinata dello stesso e quindi la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro G nella rotazione del sottografico intorno all'asse delle y è maggiore della lunghezza della circonferenza descritta dallo stesso punto nella rotazione del sottografico attorno all'asse delle x. Questo è il motivo per cui sussiste la disuguaglianza $V_2>V_1$.

Osserviamo infine che $V_1:V_2=y_G:x_G$.