

Sul calcolo di volumi di solidi di rotazione

Funzione logaritmica

Considerata la funzione $f(x) = \log x$, calcolare il volume del solido descritto dal suo sottografico relativo all'intervallo $[1;e]$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse e in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate.

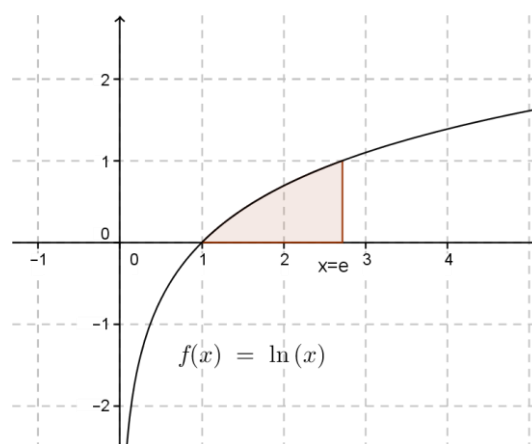
Soluzione

Solido descritto intorno all'asse x.

$$V = \int_1^e \pi \log^2 x dx$$

Il calcolo dell'integrale indefinito si esegue applicando due volte il metodo di integrazione per parti.

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e \pi \log^2 x dx = \pi \int_1^e D(x) \log^2 x dx = \\ &\pi \left[x \log^2 x - \int x \cdot \left(2 \log x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \right]_1^e = \\ &\pi \left[x \log^2 x - 2 \int \log x dx \right]_1^e = \pi \left[x \log^2 x - 2 \left(x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \right]_1^e = \\ &\pi \left[x \log^2 x - 2x \log x + 2x \right]_1^e = \pi \left[(e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) \right] = \pi(e - 2) \end{aligned}$$



Solido descritto intorno all'asse y

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e 2\pi x \log x dx = 2\pi \int_1^e D\left(\frac{x^2}{2}\right) \log x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \cdot \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right]_1^e = \\ &2\pi \left[\frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = 2\pi \left[\left(\frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{e^2}{4} \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2} \end{aligned}$$