

Gli integrali definiti per il calcolo del volume di un solido di rotazione

Per una funzione reale di variabile reale continua $f:[a;b] \rightarrow R$, con $0 \leq a < b$, è noto che

- 1) Il volume del solido descritto in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse dal sottografico della funzione relativo all'intervallo $[a;b]$ è espresso dal seguente integrale definito

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

- 2) Se la funzione reale continua $f:[a;b] \rightarrow R$ è non negativa allora il volume del solido descritto dal sottografico della funzione relativo all'intervallo $[a;b]$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate è espresso dal seguente integrale definito

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x) dx$$

- 3) Se f e g sono due funzioni reali di variabile reale continue definite nello stesso intervallo $[a;b]$ tali che per ogni x si abbia $f(x) \geq g(x) \geq 0$,

$$f:[a;b] \rightarrow R, \quad g:[a;b] \rightarrow R$$

allora

il volume del solido descritto dalla regione piana delimitata dai diagrammi delle due funzioni e dalle due rette di equazioni $x=a$, $x=b$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse è uguale a

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx - \int_a^b \pi (g(x))^2 dx$$

- 4) Se f e g sono due funzioni reali di variabile reale continue definite nello stesso intervallo $[a;b]$ tali che per ogni x si abbia $f(x) \geq g(x)$,

$$f:[a;b] \rightarrow R, \quad g:[a;b] \rightarrow R$$

allora, il volume del solido descritto dalla regione piana delimitata dai diagrammi delle due funzioni e dalle due rette di equazioni $x=a$, $x=b$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ordinate è uguale a

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

*** **

Ricordiamo inoltre che sussiste il [teorema di Guldino](#), che è spesso utilizzato per la determinazione delle [coordinate del baricentro](#) di una figura piana F.

Teorema di Guldino. Se una figura piana F di area S ruota di un giro completo intorno ad una retta [a](#) giacente nel piano della figura, che non attraversi la figura, allora il volume del solido di rotazione descritto da F è uguale al prodotto dell'area della figura piana per la misura della circonferenza descritta nella rotazione dal baricentro della figura stessa.

Indicando con [r](#) la distanza del baricentro dall'asse [a](#) di rotazione, il volume è: $V=2\pi r \cdot S$.