

Esercitazione sugli infinitesimi

1) Provare che la funzione $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ è infinitesima per $x \rightarrow 1$ e per $x \rightarrow -1$.

Determinare l'ordine e la parte principale di ciascun infinitesimo.

Soluzione

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è continua. Risulta $f(1) = 0$ e $f(-1) = 0$, quindi anche

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0.$$

Osserviamo che il polinomio può essere scomposto in fattori come segue:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2. \quad (*)$$

Ciò premesso, occorre determinare l'ordine di ciascun infinitesimo. Distinguiamo i due casi.

Caso: $x=1$

Per $x \rightarrow 1$ la funzione deve essere confrontata con l'infinitesimo campione che è $|x-1|^\alpha$, con

$\alpha > 0$. Si deve studiare il limite del rapporto $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{|x-1|^\alpha}$ e stabilire se esiste un valore $\alpha > 0$ per il

quale il limite esiste ed ha valore finito diverso da zero.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)|}{|x-1|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x-1)(x+1)^2|}{|x-1|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1||x+1|^2}{|x-1|^\alpha}$$

Il valore del limite è finito e diverso da zero solo con $\alpha=1$, quindi la funzione in esame per $x \rightarrow 1$ è un infinitesimo di ordine uno e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1||x+1|^2}{|x-1|^1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x+1|^2 = 4.$$

Ricerca della parte principale dell'infinitesimo

$$\text{Poiché si ha: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)^2 = 4,$$

in un intorno del punto $x=1$ si può utilizzare la scrittura fuori dal segno di limite

$$\frac{f(x)}{x-1} = 4 + \delta(x), \text{ con } \delta(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 1, \text{ da cui si ricava } f(x) = 4(x-1) + (x-1)\delta(x)$$

Eseguendo i calcoli necessari si riconosce che $\delta(x) = (x-1)(x+3)$ e come si vede effettivamente $\delta(x)$ è infinitesimo per $x \rightarrow 1$. La funzione è dunque esprimibile nella seguente forma

$$f(x) = 4(x-1) + (x-1)^2(x+3)$$

dalla quale si riconosce non solo che per $x \rightarrow 1$ è un infinitesimo del primo ordine e che la sua **parte principale** è rappresentata dal termine $4(x-1)$, ma anche che la **parte complementare** della funzione è $(x-1)^2(x+3)$, che risulta un infinitesimo del secondo ordine, sempre per $x \rightarrow 1$.

Osservazione

In generale, la parte complementare di una funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$ non è esprimibile elementarmente e spesso non si è in grado di esprimerla esplicitamente. In questo caso l'elaborazione fornisce una forma comoda e semplice perché la funzione con cui si opera è un polinomio. Nello studio degli infinitesimi, una volta ricavata la parte principale dell'infinitesimo, si potrà solo affermare che la parte complementare è un infinitesimo nello stesso punto avente ordine maggiore dell'infinitesimo rappresentato dalla parte principale.

Caso: $x = -1$

Anche per lo studio del comportamento della funzione per $x \rightarrow -1$ si devono ripetere tutti i passaggi sviluppati nel caso precedente. Non riteniamo, però, di riportare le considerazioni relative nei dettagli e scriviamo solo le parti essenziali delle elaborazioni.

- La funzione deve essere confrontata con l'infinitesimo campione $|x+1|^\alpha$, con $\alpha > 0$.
- La precedente scomposizione in fattori (*) del polinomio consente di riconoscere che per $x \rightarrow -1$ la funzione è un infinitesimo di ordine 2. Infatti, con $\alpha=2$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|f(x)|}{|x+1|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|(x-1)(x+1)^2|}{|x+1|^2} = \lim_{x \rightarrow -1} |x-1| = 2$$

Osserviamo che si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$$

Pertanto, in un opportuno intorno del punto $x = -1$, utilizzando la scrittura fuori dal segno di limite, si ha:

$$\frac{f(x)}{(x+1)^2} = -2 + \delta(x), \text{ con } \delta(x) \rightarrow 0, \text{ e dunque anche}$$

$$f(x) = -2(x+1)^2 + (x+1)^2 \delta(x).$$

La **parte principale** dell'infinitesimo è $-2(x+1)^2$, mentre la parte complementare è $(x+1)^2 \delta(x)$.

Lasciamo al lettore come utile esercizio il compito di provare che risulta $\delta(x) = x+1$ e dunque che la parte complementare è $(x+1)^2 \delta(x) = (x+1)^3$, che è un infinitesimo del terzo ordine.

Approfondimento (aspetto grafico)

Riportiamo due figure, una per ciascuno dei due punti studiati, $x=1$, $x=-1$, nelle quali sono riportati il digramma della funzione, quello della parte principale dell'infinitesimo e quello della parte complementare.

In **Figura 1**, relativa al punto $x=1$, il diagramma della parte principale $g(x) = 4(x-1)$ è quello di una retta (indicata con g); il diagramma della parte complementare $c(x) = (x-1)^2(x+3)$, in un intorno abbastanza “piccolo” di $x=1$ ha la forma molto simile a quella di una parabola con il vertice nel punto $V(1;0)$, ma non si tratta di una parabola (infatti è quello di una cubica). La linea è indicata con c. Sia la retta g, sia la curva c, sono riportate con stile tratteggio per distinguerle dal diagramma della funzione $y=f(x)$, riportato con tratto continuo. Si osservi che per $x \rightarrow 1$ l'ordinata del generico punto della curva $y=c(x)$, $Q(x; c(x))$, tende a zero molto più velocemente dell'ordinata del generico punto $P(x; g(x))$ della retta $y=g(x)$.

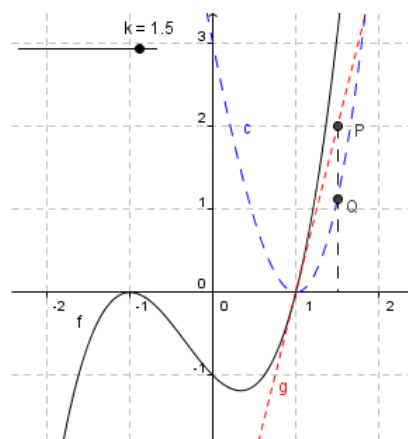


Figura 1

Analoghe considerazioni sono da effettuare sulla **Figura 2**, relativa al comportamento della funzione in un intorno del punto $x=-1$. In questo caso il diagramma della parte principale è effettivamente quello della parabola con vertice nel punto $V(-1;0)$, mentre quello della parte complementare è ancora quello di una cubica. Si osservi anche in questo caso come il valore dell'ordinata del punto Q sulla cubica c tenda a zero più velocemente di quanto non avvenga per l'ordinata del punto P, che si muove sulla curva parabolica rappresentativa della funzione $g(x) = -2(x+1)^2$ parte

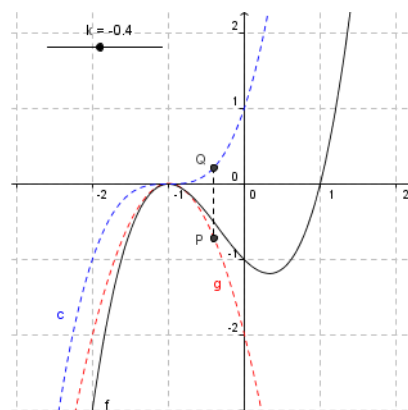


Figura 2
