

Esercizi sugli infinitesimi

- 1) Provare che la funzione $f(x) = x^2 \log(1 + 2x\sqrt{x})$ è infinitesima per $x \rightarrow 0$ e determinare l'ordine e la parte principale.

Soluzione

La funzione è definita nell'intervallo $[0; +\infty[$. La funzione è anche continua in tutto il suo dominio e dunque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Per determinare l'ordine dell'infinitesimo confrontiamo la funzione con l'infinitesimo campione x^α , con $\alpha > 0$, per $x \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \log(1 + 2x\sqrt{x})}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + 2x\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} \cdot \frac{2x\sqrt{x} \cdot x^2}{x^\alpha} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + 2x\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^\alpha} &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{x^\alpha}\end{aligned}$$

Si nota che solo per $\alpha = \frac{7}{2}$ il limite esiste ed assume valore finito diverso da zero avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{x^\alpha} = 2$$

Osservazione- Nel calcolo del limite precedente è stato utilizzato il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(1 + \varphi(x))}{\varphi(x)} = 1, \text{ con } \varphi(x) \rightarrow 0, \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Riteniamo opportuno precisare che con $\alpha > 7/2$ il valore del limite è $+\infty$ e ciò indica che il numeratore (e quindi la funzione in esame) è un infinitesimo di ordine minore di α , mentre con $0 < \alpha < 7/2$ il valore del limite è zero e dunque il numeratore è un infinitesimo di ordine maggiore di α .

Parte principale dell'infinitesimo

Dal risultato ottenuto si conclude che per $x \rightarrow 0^+$ la funzione è equivalente alla funzione

$g(x) = 2x^{\frac{7}{2}}$, che rappresenta la **parte principale** dell'infinitesimo. Per un intorno destro del punto $x=0$ si può scrivere

$$\frac{x^2 \log(1 + 2x\sqrt{x})}{x^{\frac{7}{2}}} = 2 + \delta(x), \text{ con } \delta(x) \text{ infinitesimo e quindi anche}$$

$$x^2 \log(1 + 2x\sqrt{x}) = 2x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{7}{2}} \cdot \delta(x)$$

La **parte complementare** $c(x) = x^{\frac{7}{2}} \cdot \delta(x)$, per $x \rightarrow 0^+$ è un infinitesimo di ordine maggiore di $7/2$.

- 2) Provare che la funzione $f(x) = \text{sen}(x^2 - 2x)(e^{\sqrt{x-2}} - 1)$ è infinitesima per $x \rightarrow 2$ e determinare l'ordine e la parte principale.

Soluzione

La funzione è definita nell'intervallo $[2; +\infty[$ ed è anche continua in tutto il suo dominio, perciò risulta $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \text{sen}(0)(e^0 - 1) = 0$.

Dopo aver osservato che il punto $x=2$ è di accumulazione solo a destra, per determinare l'ordine dell'infinitesimo studiamo il limite del rapporto

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{(x-2)^\alpha}$ e stabiliamo se esiste un numero $\alpha > 0$ per il quale il valore del limite è un numero

reale finito diverso da zero. Vedremo che detto numero α esiste effettivamente⁽¹⁾.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(x^2 - 2x)(e^{\sqrt{x-2}} - 1)}{(x-2)^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} \cdot \frac{(e^{\sqrt{x-2}} - 1)}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2} \cdot (x^2 - 2x)}{(x-2)^\alpha} = \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\text{sen}(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(e^{\sqrt{x-2}} - 1)}{\sqrt{x-2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot x(x-2)}{(x-2)^\alpha} &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1} \cdot 2}{(x-2)^\alpha} \end{aligned}$$

Il limite ottenuto solo per $\alpha = \frac{3}{2}$ assume valore finito

diverso da zero, precisamente vale 2.

Concludiamo che la funzione in esame è un infinitesimo di ordine 1,5 è risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} = 2.$$

Parte principale e parte complementare dell'infinitesimo.

Utilizzando la scrittura fuori dal segno del limite

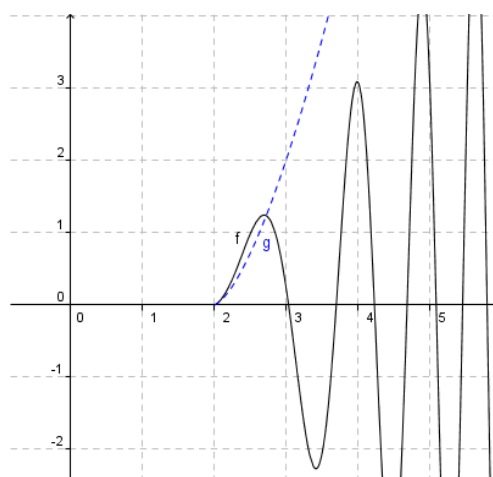


Figura 1

⁽¹⁾ Nelle elaborazioni che seguono sono stati applicati i due limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{sen}(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1$, con $\varphi(x) \rightarrow 0$ per

$x \rightarrow x_0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{\psi(x)} - 1}{\psi(x)} = 1$, con $\psi(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$.

$\frac{f(x)}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} = 2 + \delta(x)$, in un intorno destro del punto $x=2$, con $\delta(x)$ infinitesimo, deduciamo la

forma ulteriore

$$f(x) = 2(x-2)^{\frac{3}{2}} + (x-2)^{\frac{3}{2}} \cdot \delta(x);$$

la **parte principale** dell'infinitesimo è $g(x) = 2(x-2)^{\frac{3}{2}}$. La parte complementare

$(x-2)^{\frac{3}{2}} \cdot \delta(x)$, per $x \rightarrow 2^+$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 1,5.

In Figura 1 sono riportati parzialmente il diagramma della funzione con stile continuo e con stile tratteggio quello della parte principale dell'infinitesimo $g(x) = 2(x-2)^{\frac{3}{2}}$.