

Esercitazione sugli infinitesimi e gli infiniti

Parte principale di un infinitesimo e di un infinito-Parte4

Per ciascuna delle funzioni assegnate, e per il punto indicato, stabilire se la funzione è un infinitesimo o un infinito. Precisare se gli infinitesimi e gli infiniti sono dotati di ordine ed in caso affermativo determinarne il valore. Per le funzioni per le quali è possibile determinare la parte principale dell'infinitesimo o dell'infinito.

Es1) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$, per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Soluzione

La funzione è definita per tutti i punti reali $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Il punto $x = \frac{\pi}{2}$ è di accumulazione a destra ed a sinistra. Studiamo il limite per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ onde stabilire il comportamento della funzione.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{0}{0} \quad \text{Occorre affrontare la forma indeterminata.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0}$$

Studiamo i limiti laterali.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty; \quad \text{dunque} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = +\infty,$$

pertanto, per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ la funzione è un infinito.

Ricerca dell'eventuale ordine di infinito

L'infinito campione di riferimento che ha ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ è $g(x) = \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|^\alpha}$. Studiamo il

limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\left| \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right| : \frac{1}{\left| x - \frac{\pi}{2} \right|^\alpha} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\left| \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right| \cdot \frac{|2x - \pi|^\alpha}{2^\alpha} \right) = \dots = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \cdot \frac{|2x - \pi|^\alpha}{2^\alpha} \right) =$$

$$2^{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|2x - \pi|^\alpha}{|\cos x|}.$$

Operiamo un cambio di variabile ponendo

$$2x - \pi = t \rightarrow x = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{2}, \text{ con } t \rightarrow 0.$$

Il limite residuo diventa

$$2^{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^\alpha}{\left| \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right|} = 2^{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^\alpha}{\left| -\sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|} =$$

$$2^{1-\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{t}{2} \right|}{\left| -\sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|} \cdot \left| \frac{2}{t} \right| \cdot |t|^\alpha = 2, \text{ con } \alpha=1.$$

Si conclude che **l'infinito in esame ha ordine 1**.

Parte principale dell'infinito

Dal risultato ottenuto deduciamo che per

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\left| \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right| : \frac{1}{\left| x - \frac{\pi}{2} \right|^1} \right) = 2,$$

da cui, per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ segue

$$\left| \frac{\cos x}{1 - \sin x} \right| \simeq \frac{2}{\left| x - \frac{\pi}{2} \right|} = \frac{4}{|2x - \pi|}$$

Per la funzione assegnata, liberando dai moduli, si riconosce che per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ risulta,

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} \simeq \frac{4}{\pi - 2x}$$

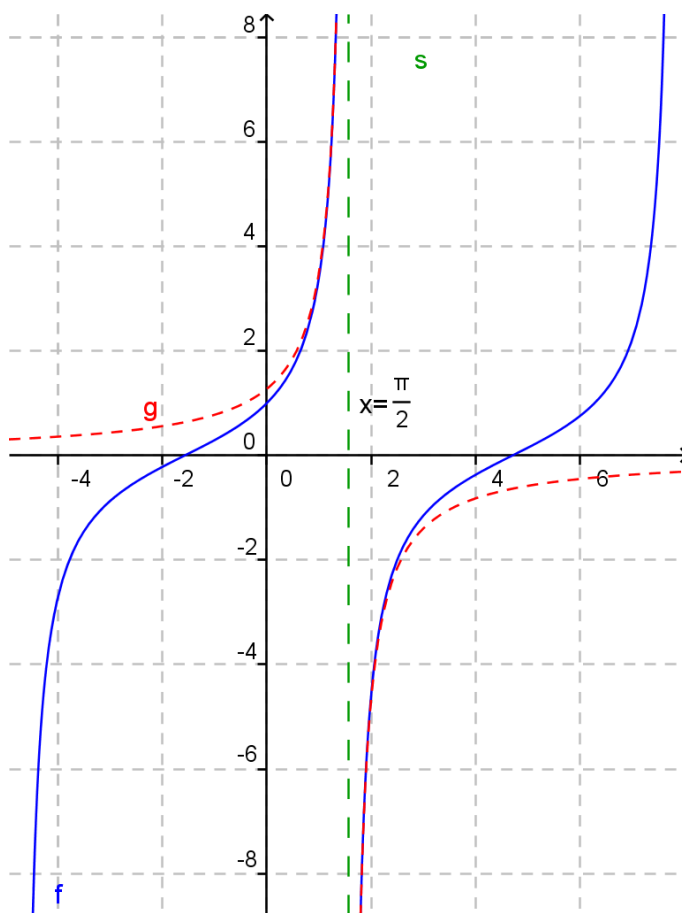


Figura 1

e quindi la parte principale dell'infinito è $g(x) = \frac{4}{\pi - 2x}$.

In **Figura 1** sono rappresentati parzialmente il diagramma della funzione $y=f(x)$ e della funzione parte principale dell'infinito $y=g(x)$; quest'ultima è disegnata con stile tratteggio ed in colore rosso, per consentirne un comodo confronto. Si noti “quanto bene” il diagramma della parte principale dell'infinito approssimi quello della funzione $y=f(x)$ in un intorno opportuno del punto $x = \frac{\pi}{2}$.

* * * * *

Es2) $f(x) = x \cdot \arctg\left(\frac{2}{x}\right)$, per $x \rightarrow 0$

Soluzione

La funzione è definita per tutti i punti reali $x \neq 0$. Il punto $x=0$ è di accumulazione a destra ed a sinistra. Studiando il limite per $x \rightarrow 0$ si riconosce che esiste ed il valore vale zero. Per la giustificazione di quest'affermazione basta osservare che la funzione è il prodotto del fattore infinitesimo x con la funzione $\arctg\left(\frac{2}{x}\right)$ che assume valori appartenenti all'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, dunque è limitata e quindi il limite vale zero in virtù del teorema della convergenza a zero per il prodotto di due funzioni.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \arctg\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

Ricerca dell'eventuale ordine dell'infinitesimo

Si deve studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cdot \arctg\left(\frac{2}{x}\right) \right| \cdot \frac{1}{|x|^\alpha}$$

Con $\alpha=1$ risulta
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cdot \arctg\left(\frac{2}{x}\right) \right| \cdot \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \arctg\left(\frac{2}{x}\right) \right|$$

e passando ai limiti laterali si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \arctg\left(\frac{2}{x}\right) \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} |\arctg(y)| = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \arctg\left(\frac{2}{x}\right) \right| = \lim_{y \rightarrow -\infty} |\arctg(y)| = \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2},$$

dunque anche
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \arctg\left(\frac{2}{x}\right) \right| = \frac{\pi}{2}.$$

Concludiamo che **l'infinitesimo ha ordine uno** e che per $x \rightarrow 0$ risulta $\left| x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \right| \approx \frac{\pi}{2}|x|$.

Per quanto concerne la parte principale dell'infinitesimo della funzione $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)$ in esame, tenendo conto del segno della funzione $\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)$, deduciamo che sussistono le seguenti approssimazioni:

$$x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \approx \frac{\pi}{2}x, \text{ per } x \rightarrow 0^+;$$

$$x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) \approx \frac{\pi}{2}(-x), \text{ per } x \rightarrow 0^-.$$

In definitiva, la parte principale dell'infinitesimo per $x \rightarrow 0$ è la funzione

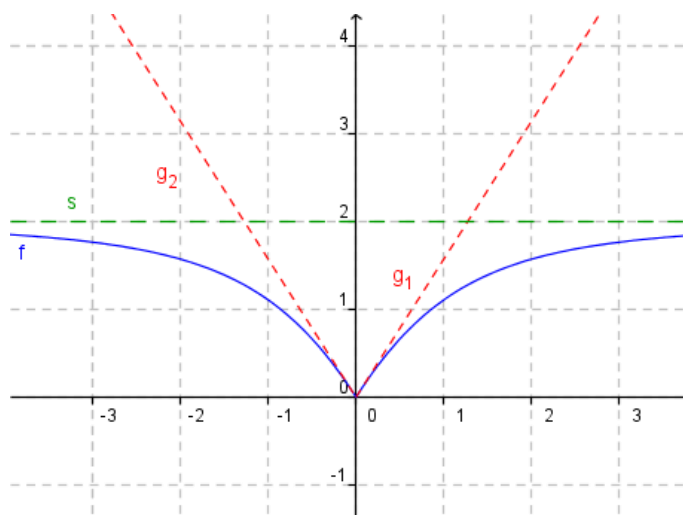


Figura 2

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(-x) & \text{per } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

In **Figura 2** sono rappresentate le due funzioni $y=f(x)$ ed $y=g(x)$ in un intorno del punto $x=0$. E' rappresentata anche la retta $s:y=2$ che risulta essere asintoto orizzontale per il diagramma della funzione $y=f(x)$.

Comandi in GeoGebra

`xatan(2/x)` per rappresentare il diagramma della funzione $y=f(x)$;

`curva[t,Pi*t/2,t,0,3]` per ottenere il segmento della semiretta $y = \frac{\pi}{2}x$, per $0 < x < 3$;

`curva[t,-Pi*t/2,t,-3,0]` per ottenere il segmento della semiretta $y = -\frac{\pi}{2}x$, per $-3 < x < 0$.