

Esercitazione sugli infinitesimi e gli infiniti

Parte principale di un infinitesimo e di un infinito

Per ciascuna delle funzioni assegnate, e per il punto indicato, stabilire se la funzione è un infinitesimo o un infinito. Precisare se gli infinitesimi e gli infiniti sono dotati di ordine ed in caso affermativo determinarne il valore. Per le funzioni per le quali è possibile determinare la parte principale dell'infinitesimo o dell'infinito.

ES1) $f(x) = \frac{\log(\cos x + 4\sin^2 x)}{\arctg x}$, per $x \rightarrow 0$

Soluzione

Osserviamo che la funzione non è definita nel punto $x=0$, ma lo stesso è di accumulazione a sinistra e a destra per il dominio di definizione ed il limite per $x \rightarrow 0$ si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Studiamo il limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x + 4\sin^2 x)}{\arctg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \cos x - 1 + 4\sin^2 x)}{(\cos x - 1 + 4\sin^2 x)} \cdot \frac{\cos x - 1 + 4\sin^2 x}{\arctg x} =$$
$$1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 4\sin^2 x}{\arctg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 4(1 - \cos^2 x)}{\arctg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(-1 + 4(1 + \cos x))}{x^2 \cdot \arctg x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\arctg x} \cdot x(3 + 3\cos x) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 3x(1 + \cos x) = 0$$

La funzione è infinitesima. Si riconosce che si tratta di un infinitesimo di ordine 1. Infatti, dai calcoli sviluppati si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} \cdot x(1 + \cos x)}{x} = 3$$

dunque $f(x) \approx 3x$, per $x \rightarrow 0$. La parte principale dell'infinitesimo è $g(x)=3x$.

In **Figura 1** è riportato parzialmente il diagramma della funzione. Si badi che nel punto $x=0$ la funzione non è definita e presenta una discontinuità eliminabile (punto di discontinuità di terza specie).

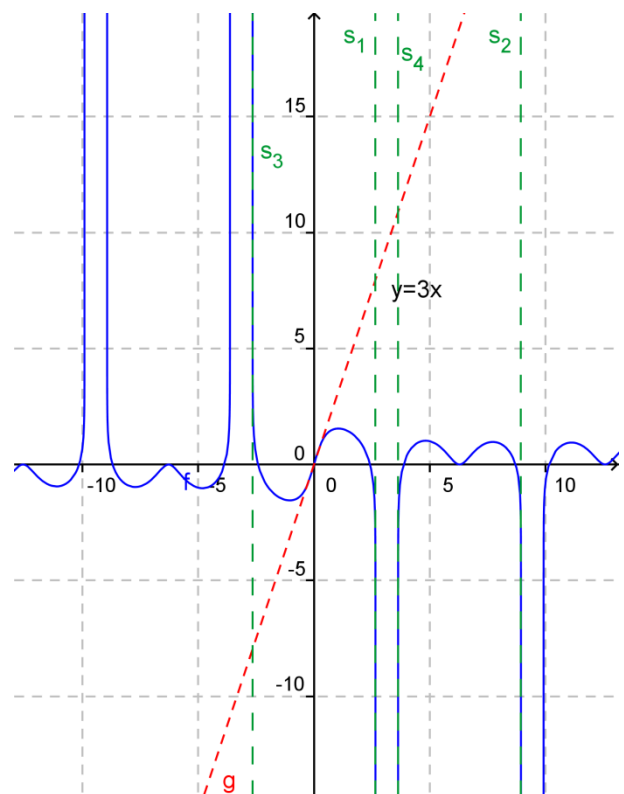


Figura 1

Il diagramma della funzione ammette come

asintoti verticali le rette le cui equazioni si deducono dalla seguente espressione

$$x = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e quelle le cui equazioni si ottengono dall'espressione $x = -\arccos\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

In **Figura 1** sono state riportate con stile tratteggio le quattro rette s_1, s_2, s_3, s_4 le cui equazioni sono

$$s_1 : x = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right), \quad s_2 : x = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right) + 2\pi, \quad s_3 : x = -\arccos\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right),$$

$$s_4 : x = -\arccos\left(\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right) + 2\pi, \text{ per ottenere le quali sono state inserite le forme sintattiche di}$$

seguito riportate:

$$s_1: x = \arccos((1-\sqrt{65})/8), \quad s_2: x = \arccos((1-\sqrt{65})/8) + 2\pi,$$

$$s_3: x = -\arccos((1-\sqrt{65})/8), \quad s_4: x = -\arccos((1-\sqrt{65})/8) + 2\pi$$

Chiudiamo queste riflessioni precisando che **la funzione in esame è dispari**, ma non è periodica.

* * * * *

ES2) $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{2x}\right)$, per $x \rightarrow 0$

Soluzione

Studio del limite $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2x}\right)$

Osserviamo che la funzione è definita per ogni $x \neq 0$; dunque il punto $x=0$ è di accumulazione a sinistra e a destra per il dominio di definizione.

Per quanto concerne il limite per $x \rightarrow 0$ osserviamo che il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{2x}\right) \text{ non esiste, ma il fattore}$$

$$k(x) = \sin\left(\frac{1}{2x}\right) \text{ è limitato, assumendo valori}$$

nell'intervallo $[-1;1]$. Poiché per l'altro fattore x^2 risulta $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, per il **teorema della**

convergenza a zero per il prodotto di due funzioni si conclude che il limite in esame esiste e

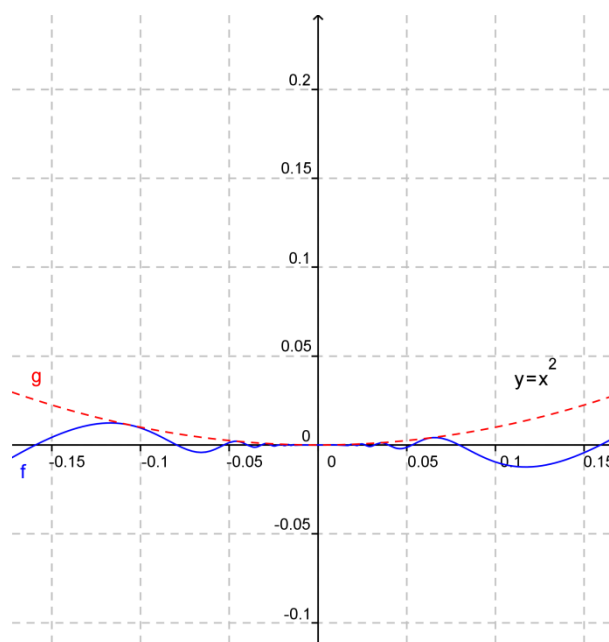


Figura 2

vale zero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right) = 0$$

La funzione per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo.

Ricerca dell'eventuale ordine dell'infinitesimo

Proviamo che **l'infinitesimo non ha ordine**. Infatti,

con $0 < \alpha < 2$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right) \right|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{2-\alpha} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right) \right| = 0, \text{ quindi, per definizione, l'ordine}$$

dell'infinitesimo è maggiore di α ;

con $\alpha=2$ il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right) \right|$ non esiste, perciò $f(x)$ non è confrontabile con x^2 ;

anche con $\alpha > 2$ il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right) \right|}{|x|^{\alpha-2}}$ non esiste.

Concludiamo che l'infinitesimo non ha ordine.