

Esercitazione sugli infinitesimi e gli infiniti

Parte principale di un infinitesimo e di un infinito

Per ciascuna delle funzioni assegnate, e per il punto indicato, stabilire se la funzione è un infinitesimo o un infinito. Precisare se gli infinitesimi e gli infiniti sono dotati di ordine ed in caso affermativo determinarne il valore. Per le funzioni per le quali è possibile determinare la parte principale dell'infinitesimo o dell'infinito.

Es1) $f(x) = x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)$, per $x \rightarrow +\infty$

Soluzione

Proviamo che la funzione per $x \rightarrow +\infty$ è un infinito. Studiamo il limite per $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)}{\frac{2x+1}{x^2}} \cdot x^3 \cdot \frac{2x+1}{x^2} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsen(y)}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2x+1) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ dunque la}$$

funzione è un infinito.

Ricerca dell'ordine dell'infinito

Confrontiamo la funzione con l'infinito campione di ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow +\infty$ che è x^α .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^\alpha} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2x+1) \cdot \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x^\alpha} = 2, \text{ con } \alpha = 2. \end{aligned}$$

La funzione è dunque un infinito di ordine 2.

Parte principale dell'infinito

La parte principale dell'infinito è $g(x) = 2x^2$ e risulta

$$x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) \approx 2x^2, \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Possiamo scrivere inoltre $x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) = 2x^2 + c(x)$, con

$c(x)$ parte complementare dell'infinito.

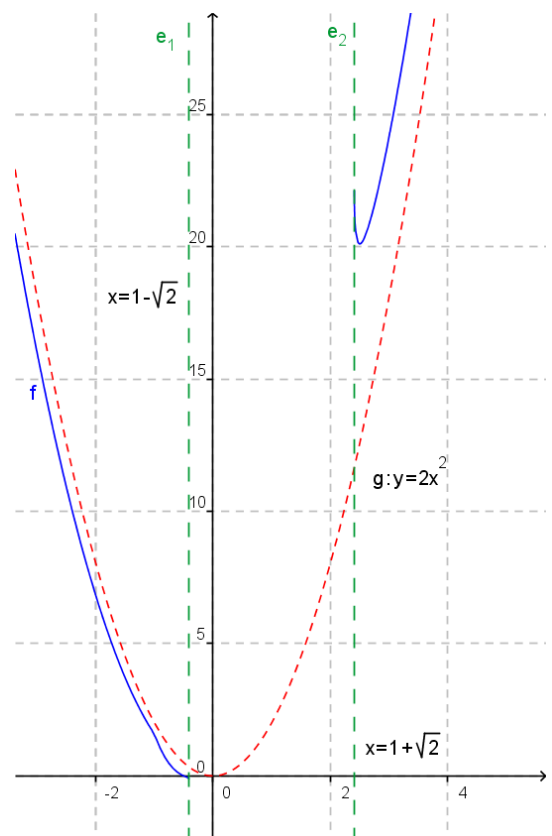


Figura 1

Approfondimento

Proviamo che la parte complementare è un infinito di ordine inferiore a 2. Questa proprietà si dimostra facendo vedere che il limite del rapporto tra $c(x)$ e l'infinito campione di ordine 2, x^2 , vale zero.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right) - 2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \arcsen\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} = 2 - 2 = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

In **Figura 1** sono riportati parzialmente i diagrammi delle funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$. Si osservi che la funzione f è definita nell'insieme $A =]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty[$ ed è continua in ogni punto del suo dominio.

* * * * *

Es2) $f(x) = 1 - \sqrt[6]{x^3 + 1}$, per $x \rightarrow 0$

Soluzione

La funzione in oggetto è definita nell'intervallo $[-1; +\infty[$ ed è continua in ogni punti dell' stesso; risulta $f(0)=0$ e quindi si ha anche $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Ricerca dell'ordine dell'infinitesimo

Si deve confrontare la funzione con l'infinitesimo $|x|^\alpha$, con $\alpha > 0$. Studiamo per $x \rightarrow 0$ il limite del rapporto $\frac{|f(x)|}{|x|^\alpha}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - \sqrt[6]{x^3 + 1}|}{|x|^3} \cdot \frac{|x|^3}{|x|^\alpha} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{(1 + x^3)^{\frac{1}{6}} - 1}{x^3} \right| \cdot \frac{|x|^3}{|x|^\alpha} &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3}{|x|^\alpha} = \frac{1}{6}, \text{ con } \alpha=3. \end{aligned}$$

Nello studio del limite è stato applicato il limite

notevole $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 + \varphi(x))^\lambda - 1}{\varphi(x)} = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$,

essendo $\varphi(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$.

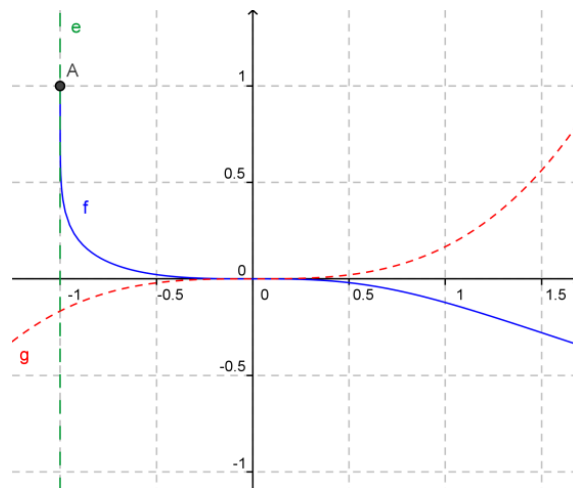


Figura 2

Concludiamo che l'infinitesimo ha ordine 3, la parte principale è $g(x) = \frac{1}{6} x^3$; possiamo scrivere

$$1 - \sqrt[6]{x^3 + 1} \approx \frac{1}{6} x^3.$$

In **Figura 2** sono rappresentati parzialmente i diagrammi delle funzioni $y=f(x)$ e $y=g(x)$.

Esercizio proposto

Il lettore verifichi che la funzione $f(x) = 1 - \sqrt[4]{x^2 + 1}$ per $x \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine 2 e che la parte principale è $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

* * * * *