

Esercitazione sugli infinitesimi e gli infiniti

Parte principale di un infinitesimo e di un infinito

Per ciascuna delle funzioni assegnate, e per il punto indicato, stabilire se la funzione è un infinitesimo o un infinito. Precisare se gli infinitesimi e gli infiniti sono dotati di ordine ed in caso affermativo determinarne il valore. Per le funzioni per le quali è possibile determinare la parte principale dell'infinitesimo o dell'infinito.

Es1) $f(x) = \frac{x - 2x^3}{x + 1}$, per $x \rightarrow +\infty$

Soluzione

La funzione per $x \rightarrow +\infty$ è un infinito. Infatti si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right)}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{+\infty(0 - 2)}{(1 + 0)} = -\infty$$

Ricerca dell'ordine dell'infinito

Confrontiamo la funzione con l'infinito campione di ordine $\alpha > 0$, per $x \rightarrow +\infty$ che è x^α .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^3}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right)}{\left(1 + \frac{1}{x} \right) x^\alpha} = -2$$

con $\alpha=2$, quindi la funzione è un infinito di ordine 2.

La parte principale dell'infinito è $-2x^2$ e risulta $\frac{x - 2x^3}{x + 1} \simeq -2x^2$ per $x \rightarrow +\infty$.

Possiamo far comparire la parte complementare $c(x)$ ponendo

$$f(x) = \frac{x - 2x^3}{x + 1} = -2x^2 + c(x).$$

Si ha: $c(x) = \frac{x - 2x^3}{x + 1} + 2x^2 = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$ e si riconosce agevolmente che $c(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ è un infinito di ordine uno.

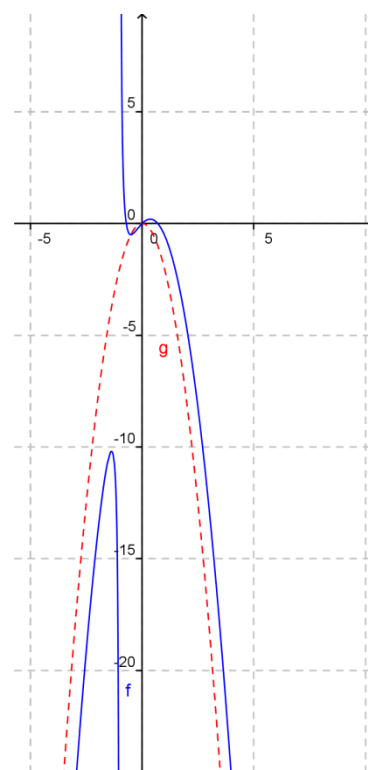


Figura 1

Es2) $f(x) = (x+1)\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)$, per $x \rightarrow +\infty$

Soluzione

Proviamo che la funzione per $x \rightarrow +\infty$ è un infinitesimo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsen(y)}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$1 \cdot (0 + 0) = 0$$

Ricerca dell'ordine dell'infinitesimo

L'infinitesimo campione di ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow +\infty$ è $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$. Studiamo il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ per stabilire se per qualche $\alpha > 0$ il limite esiste ed assume valore finito diverso da zero.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right) : \frac{1}{x^\alpha} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^\alpha =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (x+1) \cdot x^\alpha = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha (x+1)}{x^2} = 1, \text{ solo con } \alpha=1. \text{ Concludiamo che}$$

l'infinitesimo ha ordine uno e la sua parte principale è $g(x) = \frac{1}{x}$.

Possiamo scrivere

$$(x+1)\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right) \approx \frac{1}{x}, \quad \text{nonché}$$

$$(x+1)\arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} + c(x)$$

con la funzione $c(x)$ parte complementare che si riconosce essere un infinitesimo di ordine

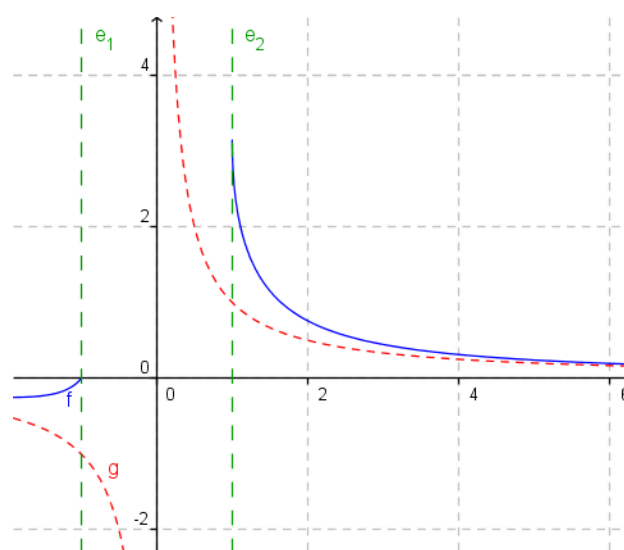


Figura 2

superiore ad 1 (uno) per $x \rightarrow +\infty$.

In Figura 2 è rappresentato con tratto continuo il diagramma della funzione $y=f(x)$ e con tratteggio, in colore rosso, il diagramma della funzione $y=g(x)$ che rappresenta la parte principale dell'infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$.

* * * * *