

Sviluppo di una successione in un intorno di $+\infty$

Considerata la successione numerica di termine generale $a_n = n - \sqrt{n^2 - n - 2}$, studiarne il limite per $n \rightarrow +\infty$ e dopo aver riconosciuto che converge scrivere lo sviluppo del termine generale determinando i termini necessari affinché l'approssimazione abbia errore inferiore ad $1/n^2$.

Elaborazioni

1) Studio del limite per $n \rightarrow +\infty$

Il termine della successione è definito per $n \geq 2$. Ciò premesso notiamo che il

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n - 2}$ si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$ e lo si affronta razionalizzando l'espressione come segue.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n - 2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n - 2} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 - n - 2}}{n + \sqrt{n^2 - n - 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - (n^2 - n - 2)}{n + \sqrt{n^2 - n - 2}} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 2}{n + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Il valore del limite è finito, dunque la successione è convergente.

2) Posto $\varphi(n) = n - \sqrt{n^2 - n - 2}$, la differenza $\varphi_1(n) = \varphi(n) - \frac{1}{2}$ per $n \rightarrow +\infty$ è un infinitesimo,

dunque, scrivendo $n - \sqrt{n^2 - n - 2} = \frac{1}{2} + \varphi_1(n)$, abbiamo una prima approssimazione del termine

generale della successione per $n \rightarrow +\infty$ e possiamo scrivere $n - \sqrt{n^2 - n - 2} \simeq \frac{1}{2}$. Cerchiamo di

studiare il tipo dell'infinitesimo $\varphi_1(n)$, determinandone l'ordine, qualora esista, confrontandolo

con l'infinitesimo campione di ordine $\alpha > 0$, che com'è noto è $\frac{1}{n^\alpha}$.

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - n - 2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{n^2 - n - 2} \right] =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{n^2 - n - 2} \right] \cdot \frac{\left(n - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{n^2 - n - 2}}{\left(n - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{n^2 - n - 2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha \left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\sqrt{n^2 - n - 2} \right)^2 \right]}{\left(n - \frac{1}{2} \right) + \left(\sqrt{n^2 - n - 2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha \cdot \left[n^2 - n + \frac{1}{4} - n^2 + n + 2 \right]}{n - \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 - n - 2}} = \\
&\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9}{4} n^\alpha}{n \left(1 - \frac{1}{2n} \right) + n \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9}{4} n^\alpha}{n \left(1 - \frac{1}{2n} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \right)}
\end{aligned}$$

L'espressione ottenuta indica che solo **per $\alpha = 1$ il limite ha valore finito diverso da zero** e vale $\frac{9}{8}$;

dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(n)}{\frac{1}{n}} = \frac{9}{8}$, quindi per $n \rightarrow +\infty$ $\varphi_1(n)$ è un infinitesimo di ordine uno ed è

equivalente a $\frac{9}{8n}$; esprimiamo ciò scrivendo $\varphi_1(n) \approx \frac{9}{8n}$.

Si può porre anche $\varphi_1(n) = \frac{9}{8n} + \varphi_2(n)$, con $\varphi_2(n)$, che rappresenta la **parte complementare dell'infinitesimo**, che a sua volta è un infinitesimo di ordine superiore ad uno. Per quanto concerne lo sviluppo di $\varphi(n) = n - \sqrt{n^2 - n - 2}$ possiamo scrivere

$$n - \sqrt{n^2 - n - 2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \text{ L'espressione } o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ è da leggersi "o piccolo di } 1/n" \text{ il cui}$$

significato è: " **il termine $\varphi(n)$ per $n \rightarrow +\infty$ differisce dalla somma $\frac{1}{2} + \frac{9}{8n}$ per un infinitesimo di ordine superiore ad uno**".

Con il risultato acquisito non si è risposto ancora alla richiesta di determinare un'approssimazione della successione con errore inferiore a $1/n^2$. Occorre procedere con la ricerca dell'ordine dell'infinitesimo $\varphi_2(n)$ e del suo successivo sviluppo.

- 4) Con $\varphi_2(n) = \varphi_1(n) - \frac{9}{8n} = n - \sqrt{n^2 - n - 2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n}$, confrontiamo l'infinitesimo con l'infinitesimo campione $\frac{1}{n^\alpha}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_2(n)}{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} - \sqrt{n^2 - n - 2}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[\left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) - \sqrt{n^2 - n - 2} \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[\left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) - \sqrt{n^2 - n - 2} \right] \cdot \frac{\left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) + \sqrt{n^2 - n - 2}}{\left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) + \sqrt{n^2 - n - 2}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha \left[\left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) - \sqrt{n^2 - n - 2} \right] \cdot \left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) + \sqrt{n^2 - n - 2}}{\left(n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} \right) + \sqrt{n^2 - n - 2}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha \left(\frac{81}{64n^2} + \frac{9}{8n} \right)}{n \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{9}{8n^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \right)} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\alpha-1} \left(\frac{81}{64n} + \frac{9}{8} \right)}{n \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{9}{8n^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \right)}
\end{aligned}$$

A questo punto notiamo che solo con $\alpha=2$ il limite ha valore finito diverso da zero e vale $9/16$,

pertanto per $n \rightarrow +\infty$ risulta $\varphi_2(n) \simeq \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{n^2}$ e possiamo scrivere

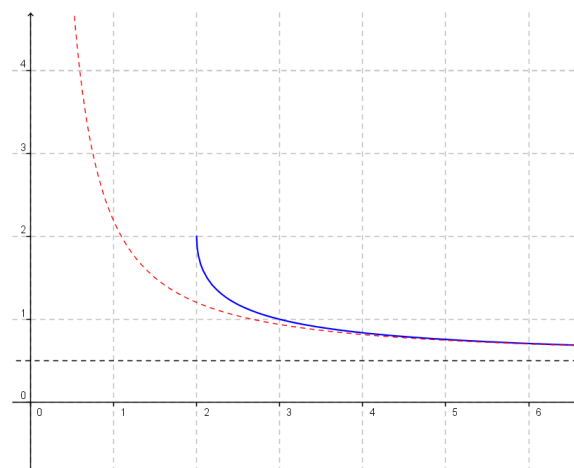
$$\varphi_2(n) = \frac{9}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ cioè}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(n) &= n - \frac{1}{2} - \frac{9}{8n} - \sqrt{n^2 - n - 2} = \\
&= \frac{9}{16n^2} + \varphi_3(n), \text{ essendo per } n \rightarrow +\infty \varphi_3(n) \text{ un} \\
&\text{infinitesimo di ordine superiore a 2.}
\end{aligned}$$

Conclusione dell'esercizio

A questo punto si conclude che lo sviluppo della successione in un intorno di $+\infty$ e con precisione superiore ad $1/n^2$ è il seguente

$$n - \sqrt{n^2 - n - 2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{8n} + \frac{9}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$



Nella figura a margine sono rappresentati i grafici della funzione $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 2}$, in stile continuo, e quello della funzione approssimante $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{9}{8x} + \frac{9}{16x^2}$, in stile tratteggiato.