

Studio di limiti e confronto di infiniti e di infinitesimi

Date le funzioni $f(x) = x + \operatorname{sen} x$, $g(x) = x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$ stabilire quale sia il comportamento per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$; nel caso le stesse siano nei punti indicati infiniti o infinitesimi precisarne l'eventuale ordine e se siano confrontabili.

Elaborazioni

Le due funzioni in esame sono definite su tutto l'asse reale e sono continue.

Comportamento per $x \rightarrow 0$

a) Entrambe le funzioni sono infinitesime nel punto

$$x=0: f(0)=0, g(0)=0 \cdot e^0 = 0.$$

b) Ordine degli infinitesimi

- Risulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 2,$

quindi la funzione $f(x)$ è un infinitesimo del primo ordine e precisamente è equivalente all'infinitesimo $y=2x$.

- Si ha anche $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot e^{\operatorname{sen} x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1,$

quindi la funzione $g(x) = x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$ nel punto $x=0$ è infinitesimo di ordine 1 ed è equivalente alla funzione $y=x$.

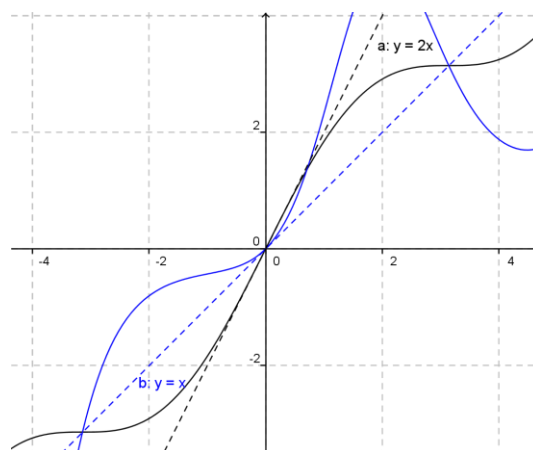


Figura 1-Le due funzioni $x+\operatorname{sen} x$, $x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$ per $x \rightarrow 0$ sono due infinitesimi di ordine uno ed equivalenti rispettivamente a $2x$ e x .

Comportamento per $x \rightarrow +\infty$

a) Dimostriamo che entrambe le funzioni tendono a $+\infty$.

a. La funzione $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ è la somma della funzione x che tende a $+\infty$ con la funzione $\operatorname{sen} x$ che è limitata inferiormente, quindi per il teorema della divergenza sulla somma di due funzioni (la prima tendente a $+\infty$ infinito e la seconda limitata inferiormente) la funzione tende a $+\infty$; possiamo osservare anche che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \operatorname{sen} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = +\infty (1+0) = +\infty.$$

Inoltre, si riconosce che la funzione in oggetto è un infinito di ordine uno. Infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

b. La funzione $g(x) = x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$ è il prodotto della funzione x che per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$ con la funzione $e^{\operatorname{sen} x}$ che nel suo dominio è limitata ed assume qualsiasi valore nell'intervallo

$[e^{-1}; e]$, dunque limitata inferiormente da un valore positivo. La funzione $g(x)$ per $x \geq 0$ verifica la disuguaglianza $g(x) \geq xe^{-1}$ e poiché risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-1} = +\infty$ si conclude (teorema sulla divergenza per il prodotto di due funzioni) che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\text{sen}x} = +\infty$.

b) Sull'ordine degli infiniti delle due funzioni.

Abbiamo già provato che per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $f(x) = x + \text{sen}x$ è un infinito di ordine uno. Per quanto concerne la seconda funzione $g(x) = x \cdot e^{\text{sen}x}$ osserviamo che confrontandola con l'infinito campione di ordine $r > 0$ risulta:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{\text{sen}x}}{x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-r} \cdot e^{\text{sen}x} = +\infty, \forall r \in]0; 1[$, quindi è un infinito di ordine maggiore di r ;
- con $r=1$ il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{\text{sen}x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\text{sen}x}$ non esiste e quindi l'infinito della funzione non ha ordine.

Conclusione sul confronto degli infinitesimi e degli infiniti delle due funzioni

Nel punto $x=0$ le due funzioni sono due infinitesimi dello stesso ordine e precisamente sono di ordine 1, ma i due infinitesimi non sono equivalenti.

Per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $f(x) = x + \text{sen}x$ è un infinito di ordine uno, mentre $g(x) = x \cdot e^{\text{sen}x}$ è un infinito di ordine superiore a ciascun ordine prefissato r , con $0 < r < 1$, ma non è dotato di ordine e conseguentemente **i due infiniti non sono confrontabili**.

In Figura 2 sono rappresentati approssimativamente i grafici delle funzioni in esame relativamente all'intervallo $[0; 50]$ con l'aggiunta delle rette $s_1: y = x/e$, $s_2: y = ex$ per evidenziare che il diagramma della funzione $g(x)$, in colore blu, oscilla nell'angolo acuto delimitato dalle suddette rette s_1, s_2 .

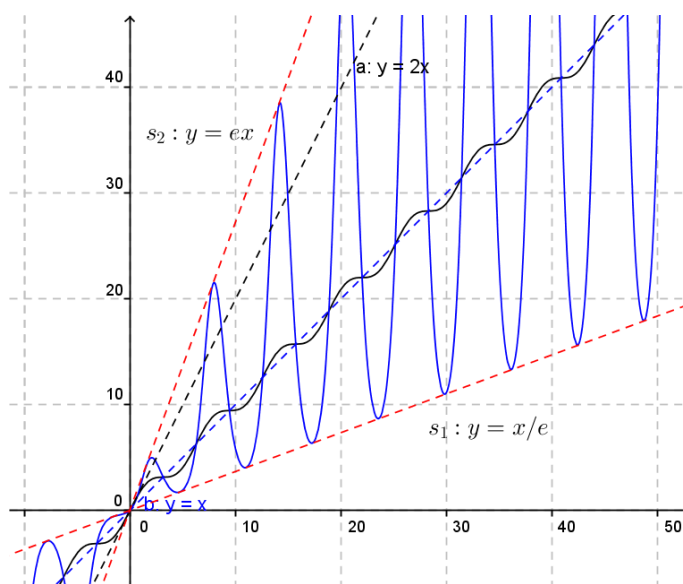


Figura 2