Esercitazione sugli intervalli

Seconda parte[1]

Sia l>0 un numero reale qualsiasi. Si consideri l'intervallo

$$I_1 = \left[-\frac{l}{2}; \frac{l}{2} \right] = [a_1; b_1]$$

Q1- Determinare l'ampiezza δ_1 di I_1 .

Q2- Si determinino gli estremi dell'intervallo $I_2 = [a_2; b_2]$, essendo $a_2 = a_1 - \frac{1}{10}\delta_1$ e $b_2 = b_1 - \frac{2}{10}\delta_1$.

Sia δ_2 l'ampiezza di I_2.

Q3- Con n naturale e n>2, essendo $I_{n-1} = [a_{n-1}; b_{n-1}]$, si consideri l'intervallo $I_n = [a_n; b_n]$ con gli estremi

$$a_n = a_{n-1} - \frac{1}{10}(b_{n-1} - a_{n-1}), \qquad b_n = b_{n-1} - \frac{2}{10}(b_{n-1} - a_{n-1}).$$

Determinare la posizione limite degli estremi dell'intervallo $I_n = [a_n; b_n]$ per $n \to +\infty$

Soluzione

Q1- L'ampiezza di I_1 è $\delta_1 = \frac{l}{2} - \left(-\frac{l}{2}\right) = l$

Q2- Gli estremi di I_2 sono:

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{10}(b_1 - a_1) = -\frac{l}{2} - \frac{1}{10}\delta_1 = -\frac{l}{2} - \frac{1}{10}l = -\frac{3}{5}l;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{2}{10}(b_1 - a_1) = \frac{l}{2} - \frac{2}{10}\delta_1 = \frac{l}{2} - \frac{2}{10}l = \frac{3}{10}l;$$

l'ampiezza dell'intervallo è $\delta_2 = b_2 - a_2 = \frac{3}{10}l - \left(-\frac{3}{5}l\right) = \frac{9}{10}l$

Q3- Osserviamo che per la definizione di I_n l'estremo sinistro a_n si sposta a sinistra dell'estremo sinistro a_{n-1} di I_{n-1} di un decimo dell'ampiezza di I_{n-1}, mentre l'estremo destro b_n si sposta a sinistra dell'estremo destro b_{n-1} di I_{n-1} di due decimi dell'ampiezza di I_{n-1}; deduciamo che l'ampiezza di I_n è inferiore di un decimo dell'ampiezza di I_{n-1}, cioè risulta

$$\delta_n = \frac{9}{10}\delta_{n-1} \tag{1}$$

Per studiare la posizione cui tendono al limite gli estremi dell'intervallo I_n si deve determinare l'espressione di ciascuno dei due estremi. Con i simboli introdotti si ha:

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{10}\delta_1;$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{10}\delta_2 = a_1 - \frac{1}{10}\delta_1 - \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\delta_1 = a_1 - \frac{\delta_1}{10}\left(1 + \frac{9}{10}\right);$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{10}\delta_3 = a_1 - \frac{\delta_1}{10}\left(1 + \frac{9}{10}\right) - \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2\delta_1 = a_1 - \frac{\delta_1}{10}\left[1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2\right];$$

---

[1] La prima parte dell'esercitazione sugli intervalli è quella riportata nel documento: *Esercitazione sugli intervalli_20111002-Soluzione.doc*

iterando il procedimento, per l'estremo sinistro di I_n si ha

$$a_n = a_1 - \frac{\delta_1}{10}\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}\right] \tag{2}$$

Tenendo presente l'identità

$$1-x^n = (1-x)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}\right), \tag{3}$$

che per $x\neq1$ si può anche scrivere nella forma

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}, \tag{4}$$

possiamo scrivere l'espressione di a_n in modo diverso. Precisamente

$$a_n = a_1 - \frac{\delta_1}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{9}{10}} = a_1-\delta_1\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right]. \tag{5}$$

A questo punto possiamo studiare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left\{a_1-\delta_1\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right]\right\} = a_1-\delta_1 = -\frac{l}{2}-l = -\frac{3l}{2} \tag{6}$$

Operiamo nello stesso modo con l'estremo destro dei successivi intervalli. Si ha:

$$b_2 = b_1 - \frac{2}{10}\delta_1;$$

$$b_3 = b_2 - \frac{2}{10}\delta_2 = b_1 - \frac{2}{10}\delta_1 - \frac{2}{10}\cdot\frac{9}{10}\delta_1 = b_1 - \frac{2}{10}\delta_1\left(1+\frac{9}{10}\right);$$

$$b_4 = b_3 - \frac{2}{10}\delta_3 = b_1 - \frac{2}{10}\delta_1\left(1+\frac{9}{10}\right) - \frac{2}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2\delta_1 = b_1 - \frac{2\delta_1}{10}\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2\right]$$

e iterando il procedimento, per l'estremo destro di I_n si ha

$$b_n = b_1 - \frac{2\delta_1}{10}\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}\right] = b_1 - \frac{2\delta_1}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}{1-\frac{9}{10}} =$$

$$b_1 - 2\delta_1\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right] \tag{7}$$

Studiano il limite per $n\to+\infty$ si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left\{b_1-2\delta_1\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right]\right\} = b_1-2\delta_1 = \frac{l}{2}-2l = -\frac{3}{2}l$$

Conclusione

Poiché i due limiti hanno lo stesso valore, cioè i due estremi dell'intervallo tendono allo stesso punto reale, si deduce che l'intervallo $I_n = [a_n; b_n]$, per $n\to+\infty$, si riduce all'unico punto

$-\frac{3}{2}l$ .Poniamo

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \left\{-\frac{3}{2}l\right\}$$