

Esercizi sugli insiemi numerici

Es4- In relazione all'insieme numerico $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x - \sqrt{x} \leq 0) \wedge \left(\frac{1}{2x^2} \leq 1 \right) \right\}$

1. determinare i suoi punti e riconoscere che è un intervallo;
2. indicare l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se sono anche rispettivamente minimo e massimo dell'insieme;
3. determinare l'ampiezza dell'intervallo ed il suo centro c ;
4. riconosciuto che il punto $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ è interno all'insieme, determinare il più grande intorno circolare di tale punto incluso nell'insieme.

Es5- Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x) = x^3 + 27$,

1. dimostrare che è biunivoca e determinare la funzione inversa;
2. determinare l'insieme numerico $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (f(x) \leq 4 \cdot f(0)) \wedge \left(f(x) \geq 2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \right) \right\}$.
3. Riconosciuto che A è un intervallo limitato, determinarne l'ampiezza ed il centro.

Soluzione

Es4)

1. Risolviamo il sistema di disequazioni
$$\begin{cases} x - \sqrt{x} \leq 0 & (*) \\ \frac{1}{2x^2} \leq 1 & (**) \end{cases}$$

Disequazione (*)

$$x - \sqrt{x} \leq 0$$

La disequazione si può scrivere nella forma $\sqrt{x} \geq x$

Considerato che per l'esistenza del radicale quadratico deve risultare $x \geq 0$, si possono elevare entrambi i membri al quadrato e ottenere una disequazione equivalente priva di radicali:

$$x \geq x^2 \quad \text{Questa disequazione ammette come insieme di soluzioni } S_1 = [0; 1]$$

Disequazione (**)

La disequazione ha senso per $x \neq 0$ ed è equivalente alla disequazione

$$x^2 \geq \frac{1}{2} \quad \text{il cui insieme di soluzioni è } S_2 = \left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[.$$

L'insieme delle soluzioni del sistema, e quindi l'insieme richiesto A è $S_1 \cap S_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$.

Concludiamo che l'insieme A è un intervallo chiuso e limitato.

2. L'estremo inferiore di A è $e' = \frac{\sqrt{2}}{2}$, che è anche minimo dell'insieme; l'estremo superiore è $e'' = 1$, che è anche massimo dell'insieme.
3. L'ampiezza di un intervallo limitato è data dalla differenza tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Nel caso in esame risulta $\mu(A) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il centro di un intervallo limitato è dato dalla semisomma degli estremi dell'intervallo stesso; dunque risulta

$$c = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

4. Per il punto $x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ sussistono le disuguaglianze strette

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Infatti la prima disuguaglianza è equivalente alla disuguaglianza $4 > 3$, che è vera; la seconda disuguaglianza si può trasformare nell'equivalente $2\sqrt{2} < 3$, cioè $8 < 9$, vera anch'essa.

Il punto $x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ è perciò interno all'insieme A.

Osserviamo che $\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94280\dots$, mentre il centro dell'intervallo è $c = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 0,85355\dots$ e quindi $c < x_0 < 1$. Il più grande intorno circolare del punto x_0 è quello che ha semiampiezza

$$\delta = 1 - x_0 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ L'intorno è perciò}$$

$$I(x_0; \delta) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[= \left] \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1; 1 \right[$$

Es5

1. La funzione in esame è un polinomio ed è definita su tutto l'asse reale. Per dimostrare che è biunivoca occorre provare che è iniettiva e suriettiva.

Iniettività

Siano x_1, x_2 due qualsiasi punti reali diversi tra loro; si deve provare che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$f(x_1) = x_1^3 + 27, \quad f(x_2) = x_2^3 + 27.$$

Se fosse $f(x_1) = f(x_2)$, quindi $x_1^3 + 27 = x_2^3 + 27$, si avrebbe anche $x_1^3 = x_2^3$ e dunque anche $\sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3}$, cioè $x_1 = x_2$. Poiché per ipotesi è $x_1 \neq x_2$, si deduce che non può essere $f(x_1) = f(x_2)$, perciò risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Suriettività

Sia $y \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale. Occorre provare che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $f(x) = y$.

Si tratta di risolvere l'equazione $x^3 + 27 = y$ nell'incognita x . Ebbene

$x^3 + 27 = y$ è equivalente all'equazione $x^3 = y - 27$, che in $\mathbb{R}$ ammette come unica soluzione $x = \sqrt[3]{y - 27}$. La funzione è dunque suriettiva.

In definitiva la funzione è biunivoca.

Espressione della funzione inversa

Con $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(x) = y$, risulta $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 27}$; cioè la funzione inversa è

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 27}$, per ogni y reale.

2. Risulta $f(0) = 27$ ed $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{8} + 27$. L'insieme numerico A è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} f(x) \leq 4 \cdot f(0) \\ f(x) \geq 2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}, \text{ cioè del sistema } \begin{cases} x^3 + 27 \leq 4 \cdot 27 \\ x^3 + 27 \geq 2 \cdot \left(\frac{x^3}{8} + 27\right) \end{cases}.$$

$$\text{Il sistema si riduce alla forma } \begin{cases} x^3 \leq 3 \cdot 27 \\ \frac{3}{4}x^3 \geq 27 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} x \leq 3 \cdot \sqrt[3]{3} \\ x \geq \sqrt[3]{36} \end{cases}.$$

Pertanto risulta $A = [\sqrt[3]{36}; 3 \cdot \sqrt[3]{3}]$.

3. L'ampiezza dell'intervallo A è $\mu(A) = 3 \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{36} \approx 1,024821...$ ed il centro è il punto

$$c = \frac{\sqrt[3]{36} + 3 \cdot \sqrt[3]{3}}{2} \approx 3,814337...$$